

El modelo es:

0320012010

$$\frac{dN}{dt} = RN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$$

¿Qué significa "brote", en este modelo?

Cuando los parámetros se mueven, la población de insectos salta de un nivel bajo a un nivel alto.

¿Qué quiere decir "alto" y "bajo"?

### Formulación adimensional.

Para estudiar mejor el modelo, movamos todos los parámetros ~~sea~~ a la "parte de depredación", o a la "parte logística".

La parte logística parece ser mejor ~~entendi~~ <sup>& ser más</sup> "simple" dado que implica una "recta" (ver adelante), a diferencia de la "parte depredatoria" la cual es una curva más complicada.

Movamos, pues, todos los parámetros al término logístico, y dejemos el término depredatorio sin parámetros

$$P(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2} = \frac{BA^2x^2}{A^2 + A^2x^2} = B \frac{x^2}{1+x^2}$$

↑  
 $N \equiv Ax$

Entonces, dividiendo por B, el modelo resulta en:

$$A \frac{dx}{dt} = RAx \left(1 - \frac{Ax}{K}\right) - B \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\frac{A}{B} \frac{dx}{dt} = \frac{RA}{B} x \left(1 - \frac{Ax}{K}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$$

Definir los nuevos variables y parámetros:

$$\tau = \frac{B}{A} t; \text{ tiempo adimensional.}$$

$$r = \frac{RA}{B}, \quad k = \frac{K}{A}$$

We then have:

$$\frac{dx}{d\tau} = r x \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$$

Puntos fijos:

Notamos que:  $\frac{dx}{d\tau} = x \left[ r \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{1+x^2} \right]$

Por lo que:

$x_e = 0$  es siempre un punto fijo,

y es siempre inestable.

Los otros puntos fijos están dados por las soluciones a:

$$r \left(1 - \frac{x}{k}\right) = \frac{x}{1+x^2}$$

parte logística: recta

← Sin parámetros!

← Parte de depredación: curva más complicada

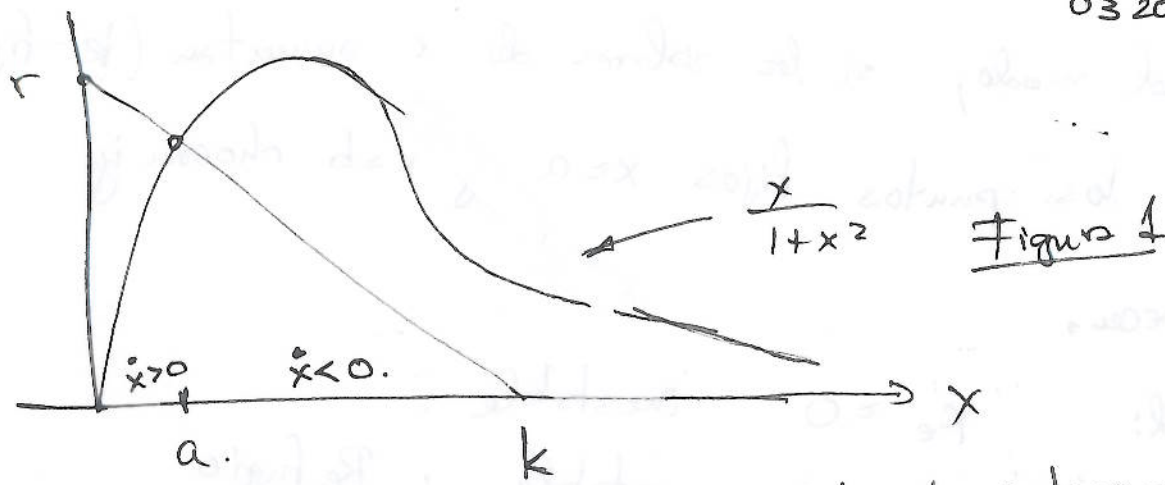


Figura 1

Para valores pequeños de  $k$ , 1-sola intersección.  
 Línea-fase: El punto  $x=a$  es estable



Si  $k$  es suficientemente grande tenemos 3 intersecciones.

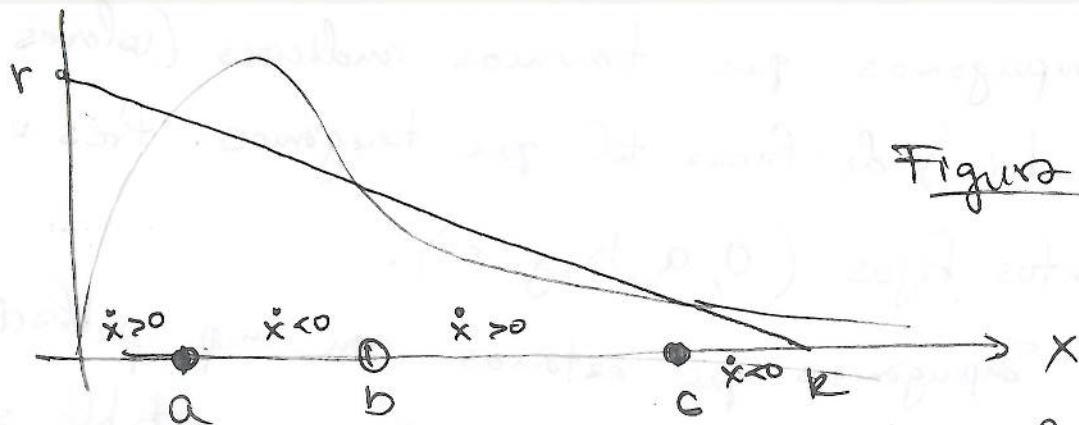


Figura 2.

Partiendo de la figura 1, y aumentando los valores de  $k$ , vemos que "emergen" los puntos fijos  $x=b$  y  $x=c$ , i.e., tenemos una bifurcación silla-nudo, y esto sucede cuando  $r(1-\frac{x}{k})$  y  $\frac{x}{1+x^2}$  son tangentes.

De igual modo; si los valores de  $r$  aumentan ( $k$ -fijo) entonces los puntos fijos  $x=a$  y  $x=b$  chocan y desaparecen.

Estabilidad:

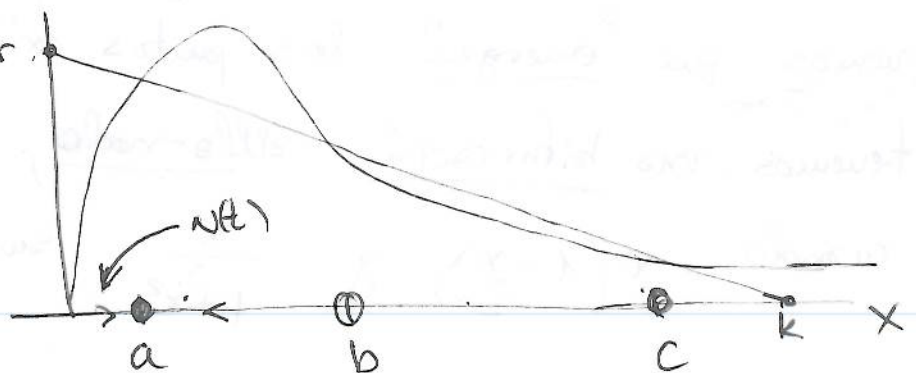
$x_e = 0$	inestable :
$x_e = a$	estable : <u>Refugio</u>
$x_e = b$	inestable
$x_e = c$	estable : <u>Brote</u> .

Estado ideal: ~~permanecer~~ permanecer lejos de los brotes.

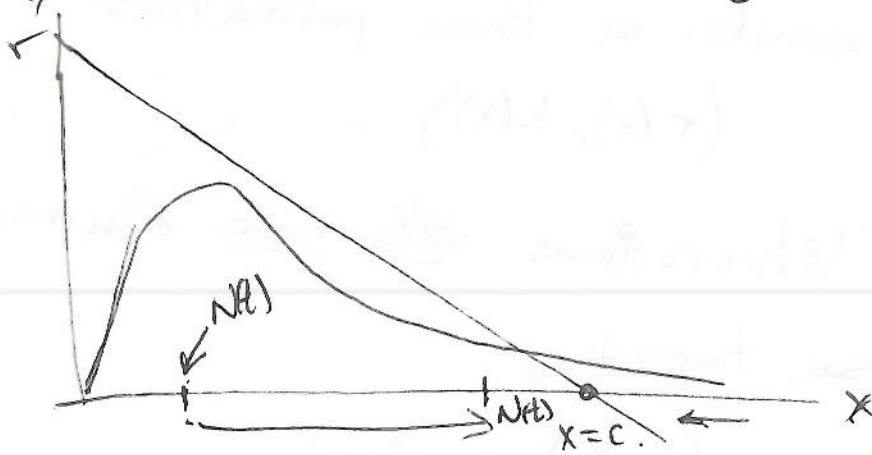
¿Cómo sucede un brote?

Supongamos que tenemos condiciones (valores de los parámetros) de forma tal que tengamos cuatro puntos fijos ( $0, a, b$  y  $c$ ).

Supongamos que estamos con una población  $N$ , cerca de  $x_e = a$ ; dado que  $x_e = a$  es estable, se permanecerá cerca de  $x_e = a$ .



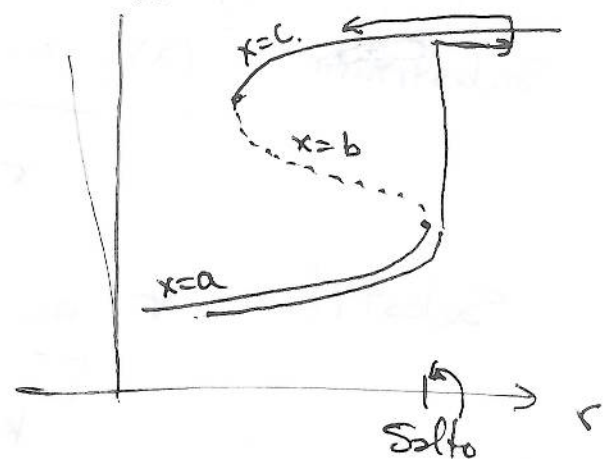
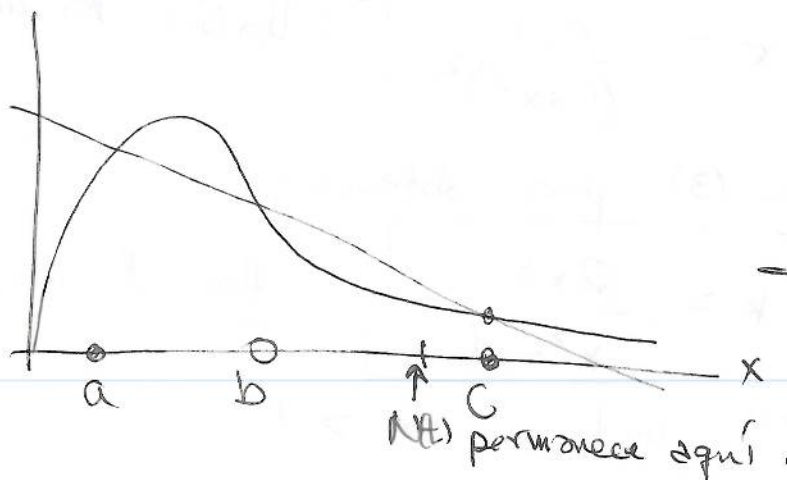
Supongamos que se incrementa el valor de  $r$ , de forma tal que los puntos fijos  $x=a$  y  $x=b$  chocan, y desaparecen... ¡toda la población brincarás a cerca de  $x=a$ , o ~~cerca~~ cerca de  $x=c$ !



Toda la población salta a cerca del punto  $x=c$ , y tenemos un brote.

Tenemos ahora un fenómeno de histeresis:

Si regresamos los valores de  $r$ , la población se queda cerca de  $x=c$ , ¡pues es el punto fijo más cercano a la población actual!



## Cálculo de las curvas de bifurcación.

Calculamos ahora donde hay ocurrencia los cambios  
y bifurcaciones silla-nodo

Aquí no será posible escribir  $r = r(k)$ , pero  
se pueden escribir en forma paramétrica:

$$(r(x), k(x)) -$$

Las bifurcaciones silla-nodo ocurren cuando.

las curvas son tangentes:

$$r \left(1 - \frac{x}{k}\right) = \frac{x}{1+x^2} \quad (1)$$

y

$$\frac{d}{dx} \left( r \left(1 - \frac{x}{k}\right) \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1+x^2} \right) \quad (2)$$

i.e.

$$-\frac{r}{k} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

(Hacer los aceros)

(3)

Substituir (3) en (1), para obtener:

$$r = \frac{2x^3}{(1+x^2)^2}$$

(Hacer los aceros)

Substituir  $r$  en (3) para obtener:

$$k = \frac{2x^3}{x^2-1}$$

Hacer los aceros.

Resto que  $k > 0$ , entonces  $x > 1$

Se obtiene, de este modo:

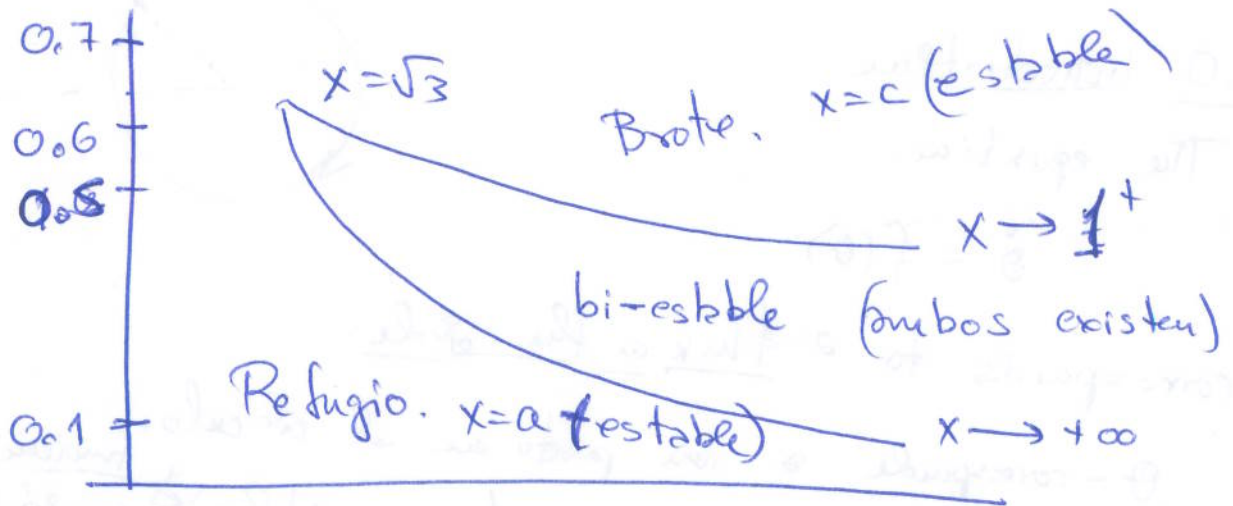
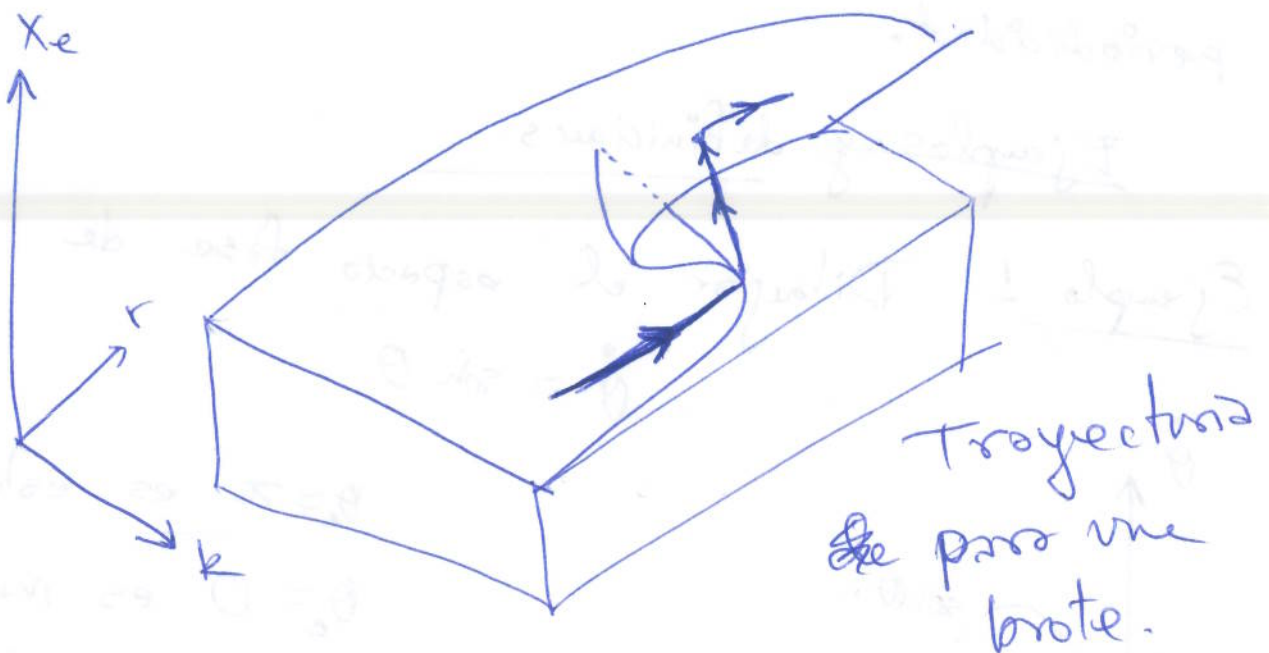
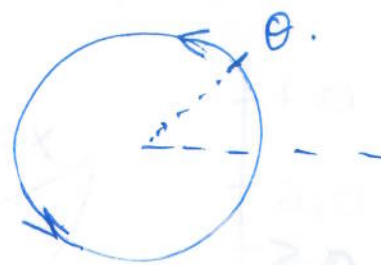


Diagrama de estabilidad.



# FLOWS ON THE CIRCLE



## 4.0 Introduction

The equation:

$$\dot{\theta} = f(\theta)$$

corresponds to a flux on the circle.

$\theta$  - corresponds to a point on the circle.

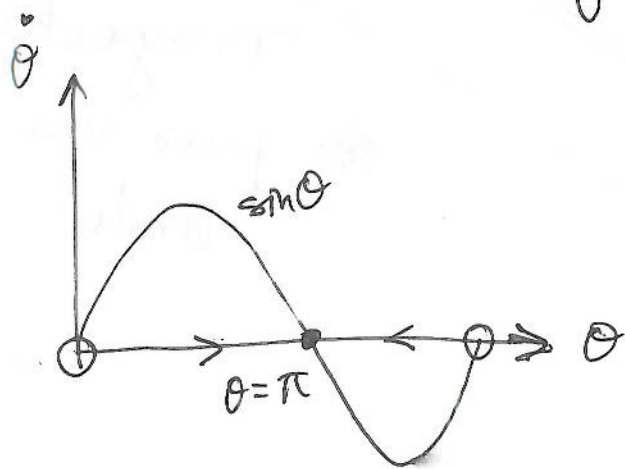
Estos modelos dependen de ciertas variables y funciones periódicas,

por lo que son los sistemas más sencillos que muestran periodicidad.

## Ejemplos y definiciones.

Ejemplo 1 Dibujar el espacio fase de

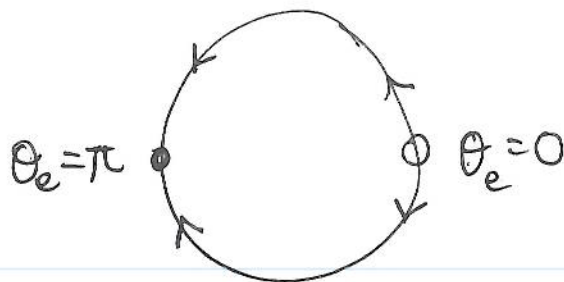
$$\dot{\theta} = \sin \theta.$$



$\theta_e = \pi$  es estable

$\theta_e = 0$  es inestable

Dado la periodicidad,  $\theta = 0 = 2\pi$





Example 2

$$\dot{\theta} = \theta; \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Este sistema no representa un campo vectorial en el círculo, pues para  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$ , tenemos dos velocidades diferentes  $\dot{\theta} = 0$  y  $\dot{\theta} = 2\pi$ .

Sin embargo, representa un campo vectorial en la línea real,  $-\infty < \theta < \infty$ .

Si restringimos el dominio a  $\theta \in [0, 2\pi]$ , vemos que hay un salto de  $\dot{\theta}$ , en  $\theta = 0 = 2\pi$ .

Def. Un campo vectorial en el círculo:  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $2\pi = 0 \pmod{2\pi}$ , si asigna una velocidad continua,  $\dot{\theta}$ , y definida únicamente en cada punto del círculo.

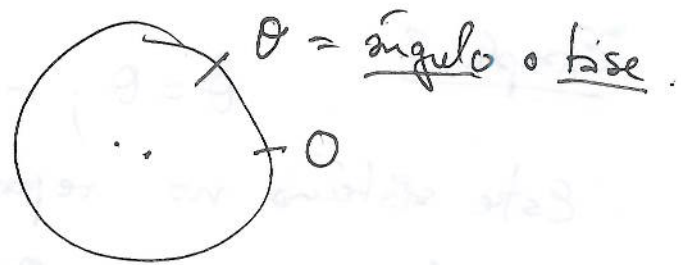
En general, esto sucede en sistemas de la forma:

$$\dot{\theta} = f(\theta),$$

donde  $f(\theta)$  tiene periodo  $2\pi$ , y es continua. Esto asegura la unicidad de la velocidad,  $\dot{\theta}$ .

Se supondrá en todas estas notas que  $f(\theta)$  es continua y diferenciable para asegurar existencia y unicidad de las soluciones.

## El Oscilador Uniforme



$$(*) \quad \dot{\theta} = \omega_0$$

$\omega = \text{velocidad angular}$

$\omega_0 = \text{constante.}$

Define un movimiento angular

uniforme.

No hay simplicidad, dado que esto implica un movimiento en 2-dim.

Periodo: El tiempo que tarda en regresar a una fase anterior; en diferencia de  $2\pi$ :

$$\theta(T+t) - \theta(t) = 2\pi. \quad T \equiv \text{periodo}$$

La solución de (\*) está dada por:

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0,$$

donde  $\theta_0$  es una constante, i.e., la fase inicial.

Entonces, para encontrar el periodo  $T$ :

$$\theta(T+t) - \theta(t) = 2\pi$$

$$(\omega_0(T+t) + \theta_0) - (\omega_0 t + \theta_0) = 2\pi$$

$$\omega_0 T = 2\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

Ejemplo Dos corredores. en una pista circular.

Speedy:  $T_1$  segundos en dar la vuelta a la pista.

Poky:  $T_2$  segundos en dar la vuelta a la pista.

SP  $T_2 > T_1$ , ¿cuánto tiempo tarda uno en sorde la vuelta al otro corredor?

— c —

Dado que  $T_2 > T_1$ , implica que Speedy es más rápido.

Entonces:  $\theta_1(t) = \omega_1 t$  } suponiendo que  
 $\theta_2(t) = \omega_2 t$  } iniciaron los dos en  $\theta_0 = 0$

Queremos conocer  $\hat{t}$  tal que:

$$\theta_1 = \theta_2 = 2\pi.$$

$$(\omega_1 - \omega_2) \hat{t} = 2\pi \Rightarrow \hat{t} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$$

Pero.  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$  y  $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$  ( $\omega_1 > \omega_2$ ).

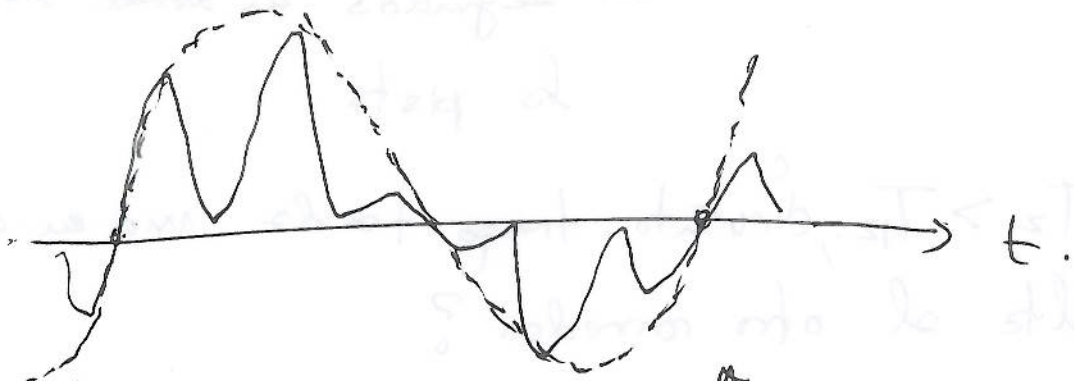
Entonces:

$$\hat{t} = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}$$

$$\hat{t} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}$$

Beating.. ① oscilaciones a diferentes frecuencias; y que no interactúan.

$$\sin(\omega_1 t + \omega_2 t) = \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t + \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t$$



Interferencias en el radio  
(Oscilaciones con interacciones → secc 4.5).

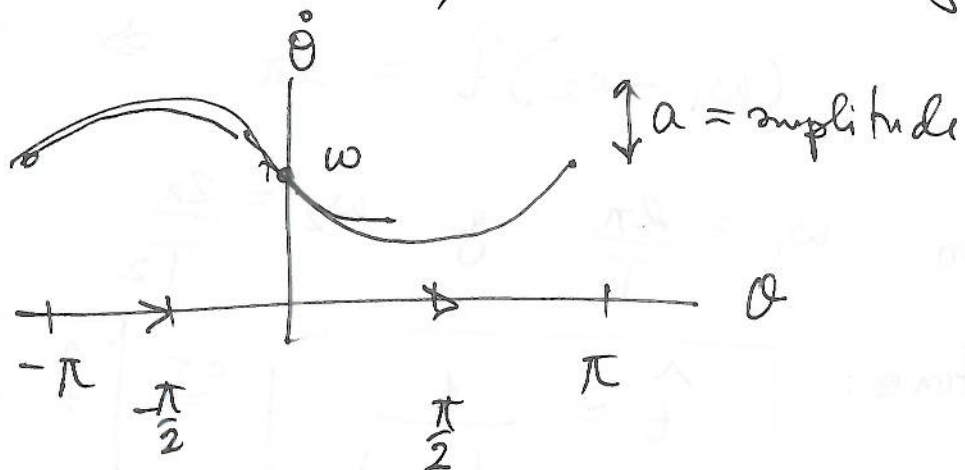
Oscilaciones no uniformes..

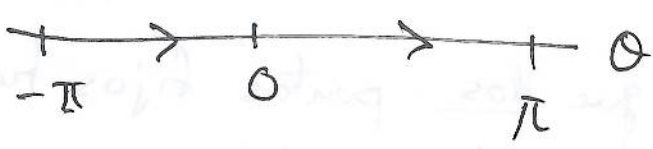
$$\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta \quad \begin{cases} \omega > 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$$

(Electrónica, Biología, Física de la materia condensada, Mecánica).

Para dibujar la línea fase, necesitamos: dibujar

$$f(\theta) = \omega - a \sin \theta.$$

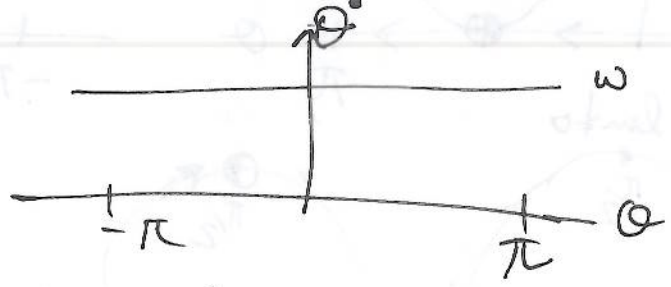




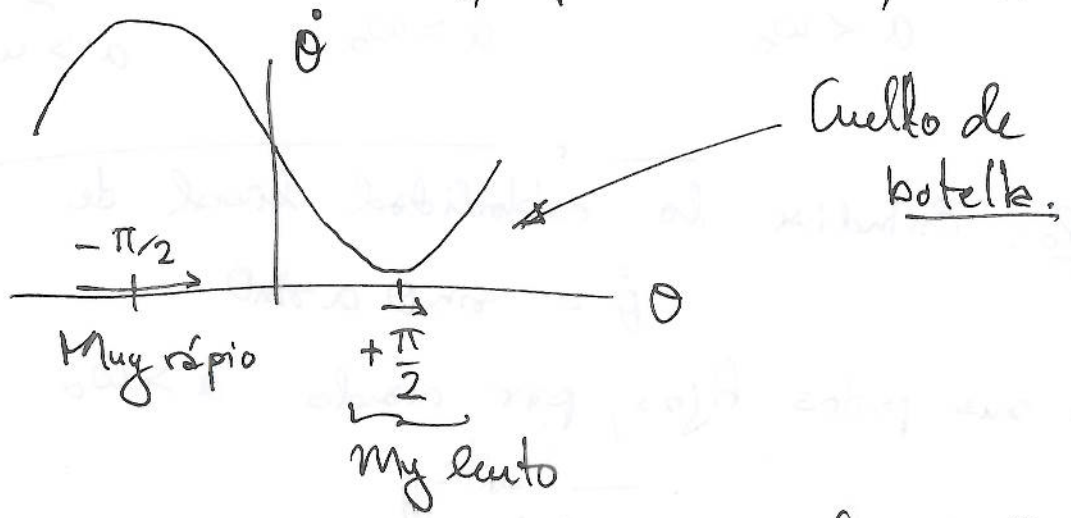
Vemos que el flujo es hacia la derecha, i.e.,  $\dot{\theta} \uparrow$ .

El máximo de  $\dot{\theta}$  es para  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  y el mínimo de  $\dot{\theta}$  es para  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . } Esto no es uniforme, es debido al término  $a$ .

\* Si  $a = 0$ , tenemos el oscilador uniforme:



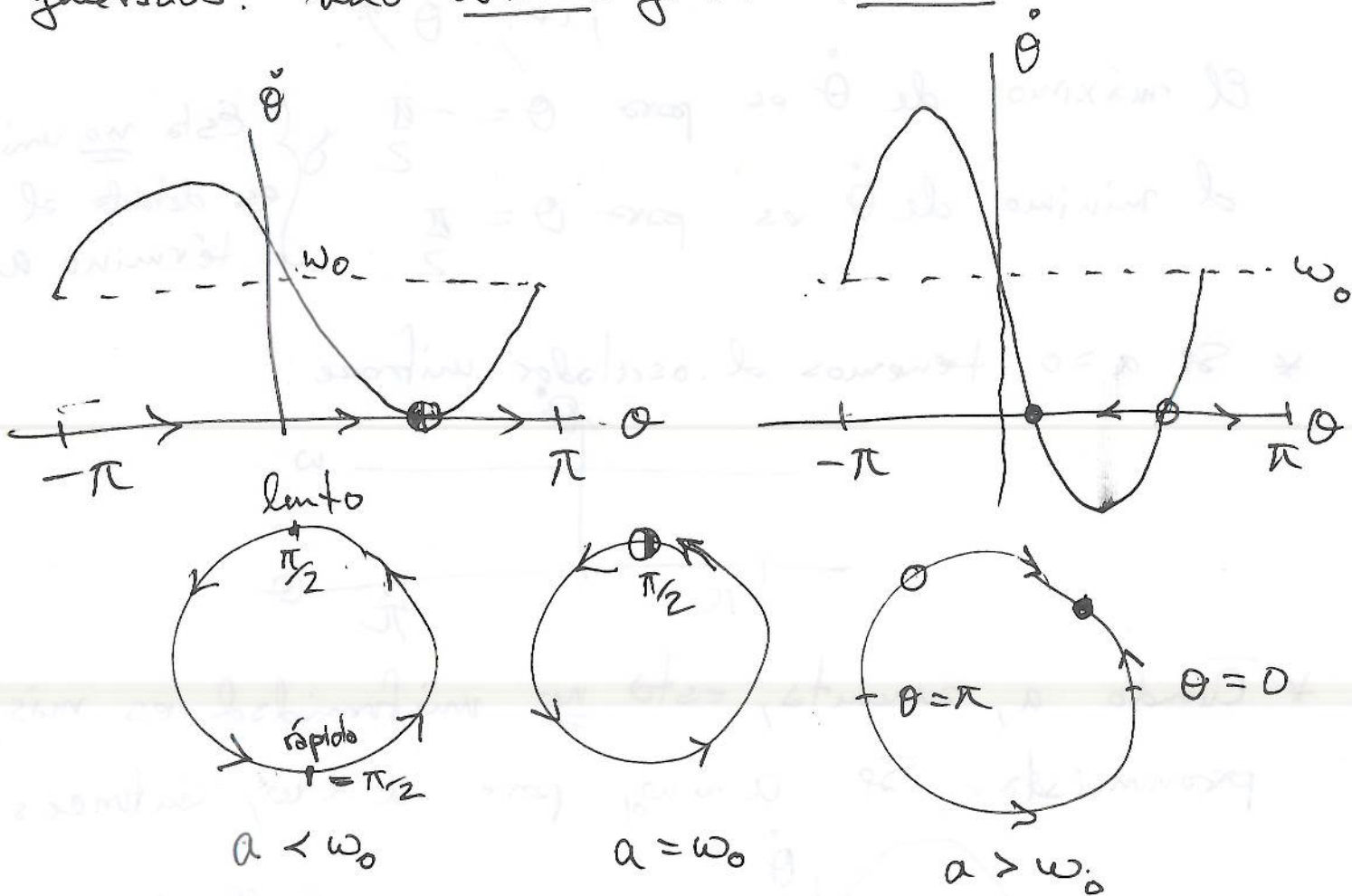
\* Cuando  $a$  aumenta, esta no uniformidad es más pronunciada. Si  $a \sim \omega_0$ , pero  $a < \omega$ , entonces



Si  $a = \omega_0$ , tenemos un punto de bifurcación del tipo silla-nudo.

En  $\theta = \frac{\pi}{2}$  se tiene un punto semi-estable:

Si  $a > \omega_0$ , tenemos que dos puntos fijos surgen:  
 uno estable y otro inestable:



Ejemplo: Estudiar la estabilidad lineal de  
 $\ddot{\theta} = \omega_0 - a \sin \theta$ .

en sus puntos fijos, cuando  $a > \omega_0$ .

Los puntos fijos son dados por:

$$\sin \theta_e = \frac{\omega_0}{a} \Rightarrow \cos \theta_e = \pm \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{a^2}}$$

Ahora bien, la linealización está dada por:

$$\theta = \theta_e + h.$$

$$(\theta_e + h) = f(\theta_e + h) = f(\theta_e) + h f'(\theta_e) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \dot{h} = f'(\theta_e) h.$$

Aquí,  $f(\theta) = \omega - a \sin \theta \Rightarrow f'(\theta) = -a \cos \theta$ .

Entonces: 
$$\dot{h} = -a \cos \theta_e h.$$

i.e. 
$$\dot{h} = \mp a \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{a^2}} h.$$

Para  $\theta_e$  con:

Para  $\cos \theta_e = +\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{a^2}}$ ,  $\dot{h} < 0$ , entonces es estable.

y para  $\theta_e$  con:

$\cos \theta_e = -\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{a^2}} \Rightarrow \dot{h} > 0$ , entonces es inestable.

El Periodo de oscilación está dado por:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta \quad \left( \text{cambio de variable, si } \frac{d\theta}{dt} \neq 0 \right).$$

i.e.

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega_0 - a \sin \theta} d\theta$$

Con la sustitución  $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$  (Ejercicio 4.3.2. del texto de Strogatz)

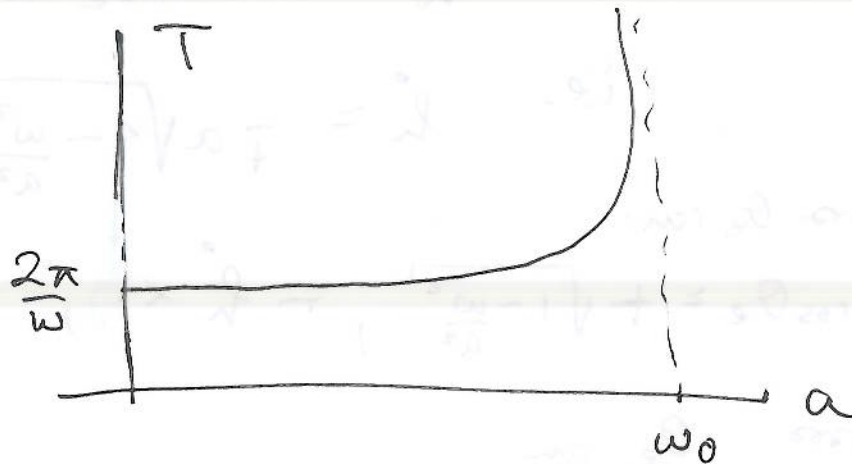
obtenemos

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - a^2}} \quad (\text{hacer el cálculo}).$$

Además mostraremos cómo estimar el valor de periodo para valores de  $a$  cercanos a  $\omega_0$ :  $a \sim \omega_0$ .

Si  $a = 0 \Rightarrow T = 2\pi/\omega_0$ , previo resultado.

Lo gráfico de  $T = T(a)$  es como sigue:



Notamos que  $\frac{dT}{da} = +\pi \frac{2a}{(\omega_0^2 - a^2)^{3/2}} > 0$  y

que  $\lim_{a \rightarrow \omega_0^-} T = +\infty$ .

Podemos estimar que tan rápido se vea  $T$ , cuando  $a \rightarrow \omega_0^-$  de la siguiente manera:

Notemos que:  $\sqrt{\omega_0^2 - a^2} = \sqrt{\omega_0 + a} \sqrt{\omega_0 - a}$

Para  $a \sim \omega_0^+$ ,  $\sqrt{\omega_0 + a} \sim \sqrt{2\omega_0}$



Entonces:

05/22/2010

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - a^2}} \sim \frac{2\pi}{\sqrt{2\omega_0} \sqrt{\omega_0 - a}} = \pi \sqrt{\frac{2}{\omega_0}} \frac{1}{\sqrt{\omega_0 - a}}$$

ie.

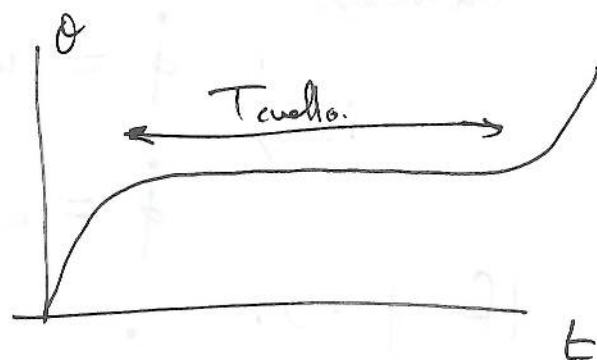
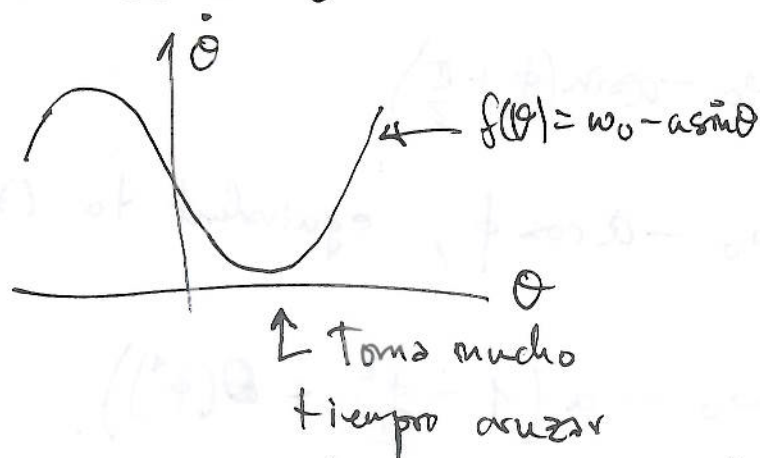
$$T \sim \pi \sqrt{\frac{2}{\omega_0}} (\omega_0 - a)^{-1/2}$$

Cuellos de botellas.

con parámetro

Son comunes en sistemas cerca del punto de bifurcación de puntos silla-nodo.

Justo antes de que haya desaparecido la bifurcación (es decir, para  $a \sim \omega_0$ , y  $a < \omega_0$ ), queda un remanente o un "fantasma" de la bifurcación:



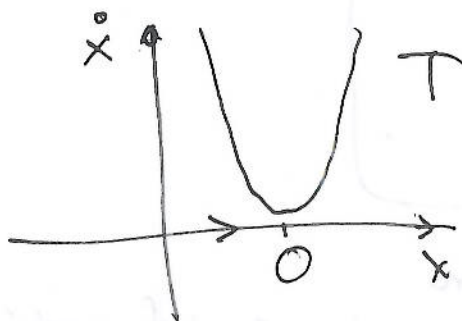
Este tiempo se puede estimar muy lento cerca de este punto.

Notamos que  $f(\theta)$  se puede aproximar por una parábola cerca de  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , de forma tal que el sistema tiene

tiene la forma:

$$\dot{x} = r + x^2, \quad 0 < r \ll 1.$$

lo cual es una forma <sup>normal.</sup> del tipo de bifurcación silla-nodo



Estimación de  $T$ :  $-\infty \leq t < 0$

y de  $0 < t < +\infty$

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\dot{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{r + x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{r}}.$$

Para el caso de:

$$(*) \quad \dot{\theta} = \omega_0 - a \sin \theta, \quad (*)$$

hagamos el cambio de variable:

$$\phi = \theta - \frac{\pi}{2}$$

Entonces:

$$\text{i.e.,} \quad \dot{\phi} = \omega_0 - a \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\dot{\phi} = \omega_0 - a \cos \phi, \quad \text{equivalent to } (*)$$

If  $\phi \sim 0$ :

$$\dot{\phi} = \omega_0 - a \left(1 - \frac{\phi^2}{2} + \mathcal{O}(\phi^4)\right).$$

$$\text{A primer orden:} \quad \dot{\phi} = (\omega_0 - a) + \frac{a}{2} \phi^2$$

$$\text{let } x = \sqrt{\frac{a}{2}} \phi \quad \text{y} \quad r = \omega_0 - a:$$

$$\sqrt{\frac{a}{2}} \dot{x} = r + x^2$$

Y si definimos una nueva variable temporal:

$$\tau = \sqrt{\frac{a}{2}} t.$$

Obtenemos:

$$\frac{dx}{d\tau} = r + x^2$$

De acuerdo a nuestro cálculo anterior; el periodo en la variable  $\tau$  es:

$$\frac{2}{T} = \frac{\pi}{\sqrt{r}} = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0 - a}};$$

pero por el cambio de variable:  $\tau = \sqrt{\frac{a}{2}} t$ , se sigue:

$$\sqrt{\frac{a}{2}} T = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0 - a}},$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \pi \sqrt{\frac{2}{\omega_0}} \frac{1}{\sqrt{\omega_0 - a}}}$$

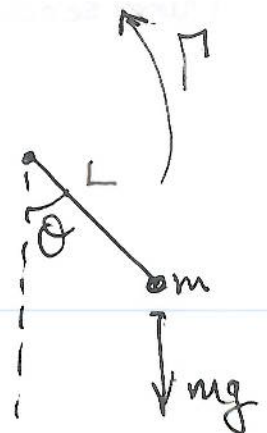
el cual coincide con el cálculo hecho en la pag 97.

donde hemos reemplazado  $a$ , por  $\omega_0$ ,  
dado que  $a \rightarrow \omega_0^+$

El péndulo sobre un eje fijo con torque externo constante  
Este es un <sup>ejemplo de un</sup> sistema oscilante no uniforme

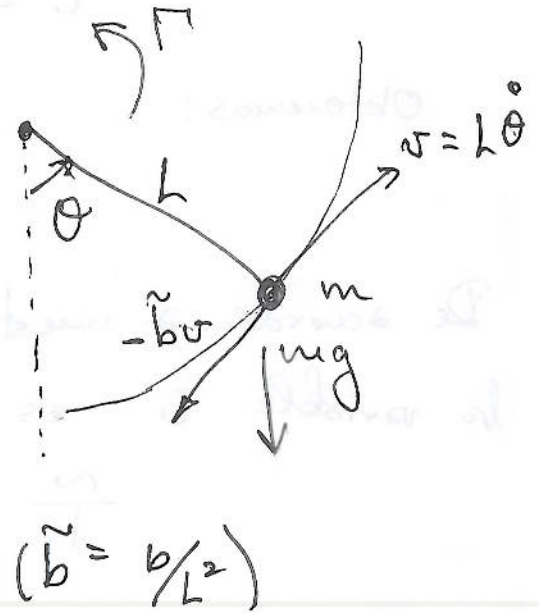
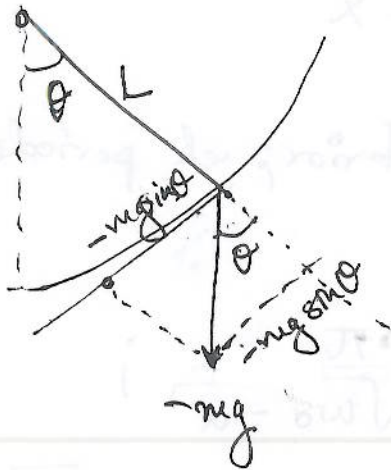
$\theta$  - ángulo del péndulo con la vertical.

El ángulo  $\theta$  aumenta en dirección antihoraria el reloj.



La ley de Newton, aplicada al péndulo, resulta ser:

$$(*) \quad mL^2 \ddot{\theta} = -b\dot{\theta} - mgl \sin \theta + \Gamma.$$



$m$  - masa

$L$  - longitud del brazo del péndulo.

$g$  - aceleración de gravedad.

$\Gamma$  - torque externo aplicado: constante.

Aquí,  $\Gamma > 0$ , significa que se aplica en la dirección de  $\theta \uparrow$ .

La ecuación (\*) es una ecuación de 2<sup>do</sup> orden.

En el límite de sobre amortiguamiento, se tiene que:  
(ver sección 3.5, ejercicio 4.4.1):

$$b\dot{\theta} = -mgl \sin \theta + \Gamma$$

Análisis 2+dimensional.

$$\frac{b}{mgh} \dot{\theta} = \frac{\pi}{mgh} - \sin \theta.$$

definir: un nuevo tiempo  $\tau$ , y nueva constante: de torque  $\gamma$

$$\tau \equiv \frac{mgh}{b} t, \quad \gamma \equiv \frac{\pi}{mgh}$$

Entonces; obtenemos,

$$\theta' = \gamma - \sin \theta \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Oscilador} \\ \text{no uniforme.} \end{array} \right.$$

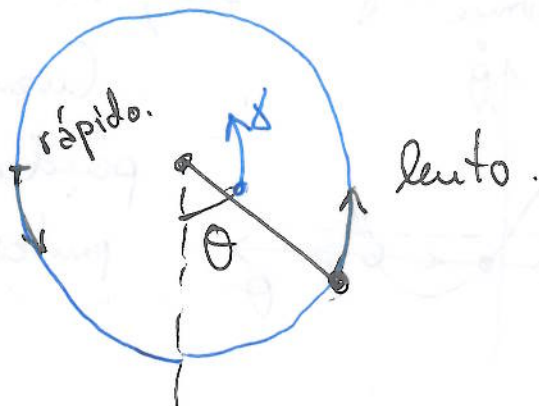
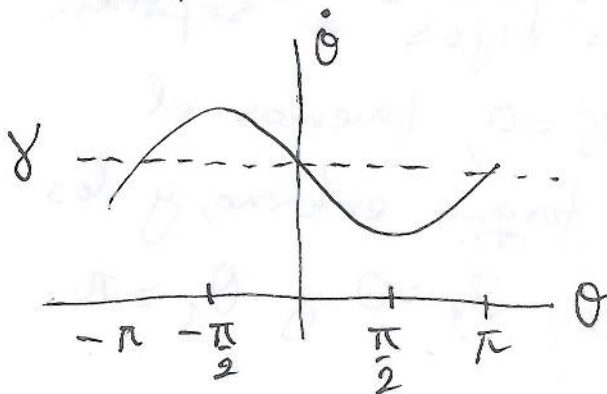
donde  $\theta' = \frac{d\theta}{d\tau}$ , la derivada respecto a  $\tau$ .

\* If  $\gamma > 1$ , el péndulo tiene suficiente energía para no

deterse y gira sin parar:  $\theta' = \gamma - \sin \theta > 0$ ,

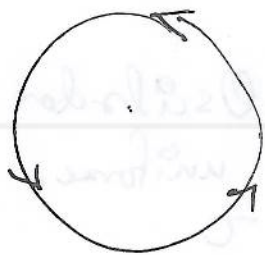
para todo  $\tau$ . No obstante, el movimiento no es

uniforme:  $\dot{\theta}$  es máximo en  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  y mínimo en  $\theta = \frac{\pi}{2}$

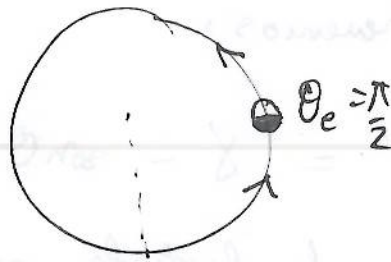


Por lo tanto  $\gamma \rightarrow 1^+$ , se toma más tiempo pasar por  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

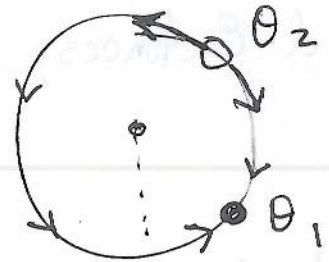
En  $\gamma = 1$ , tenemos un punto de bifurcación, puesto que un punto de equilibrio (híbrido) se crea en  $\theta_e = \frac{\pi}{2}$ , el cual se bifurca en dos puntos de equilibrio: uno estable,  $\theta_e = \theta_1$ , y el otro de equilibrio inestable  $\theta_2$ :



$\gamma > 1$



$\gamma = 1$

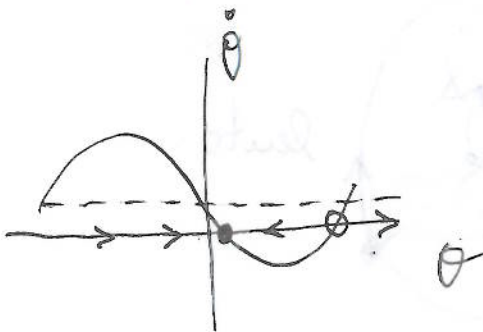


$\gamma < 1$

Intuitivamente, el ángulo de equilibrio estable es el que se encuentra más abajo.

Ejercicio: Hacer análisis de estabilidad lineal alrededor de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

Algunas  $\gamma \rightarrow 0$ , los puntos fijos se separan:



Cuando  $\gamma = 0$ , tenemos el péndulo sin torque externo, y los puntos fijos,  $\theta_1 = 0$  y  $\theta_2 = \pi$ .

## 4.5 Luciernagas.

Estos animalitos responden a estímulos luminosos externos.  
En particular, a estímulos provocados por ellos mismos.

En experimentos (ver el texto), se les ilumina con  
luces externas periódicas en fases  $\omega$ , que satisface  
la ley:  $\ddot{\theta} = \Omega$ , (1)

es decir los estímulos son periódicos constantes.

Se supone que  $\omega = 0$  corresponde cuando el estímulo brilla  
(o flashes, pues de cierto modo, es intermitente).

→ la forma en que las luciérnagas responden:

Si el estímulo es muy rápido, tratan de acelerarse

Si el estímulo es muy lento, tratan de detenerse.

Supongamos que  $\omega$  es la frecuencia natural de las  
luciérnagas. Entonces, la respuesta de las luciérnagas está  
dada por:

$$\ddot{\theta} = \omega + A \sin(\omega - \theta) \quad (2)$$

$\theta$  - fase de las luciérnagas       $\omega$  - frecuencia natural de las luciérnagas       $A \sin(\omega - \theta)$  - Respuesta al estímulo externo.

Por ejemplo, si el estímulo va adelantado:  $\omega > \theta$  (pero  $\omega - \theta < \pi$ )  
entonces  $\ddot{\theta} > 0$ , y las luciérnagas tratan de acelerar.

## Análisis.

Consideramos las ecuaciones (1) y (2) en la página anterior. Definimos:

$$\phi = \theta - \omega t.$$

De (1) y (2) se sigue que:

$$\dot{\phi} = \Omega - \omega - A \sin \phi, \quad (3)$$

el cual es un ~~oscilador~~ oscilador no uniforme.

Definimos las nuevas variables:  $\tau$  y constante:

$$\tau = At \quad \text{y} \quad \mu = \frac{\Omega - \omega}{A}.$$

para obtener:

$$\phi' = \mu - \sin \phi.$$

donde nuevamente  $(\ )' = \frac{d}{d\tau}(\ )$ .

Si  $|\mu| > 1$ , no hay puntos fijos.

Para la existencia de puntos fijos se requiere:

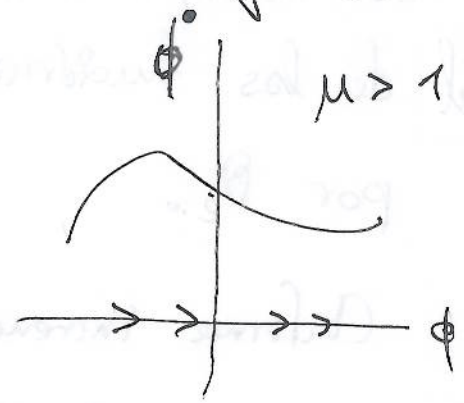
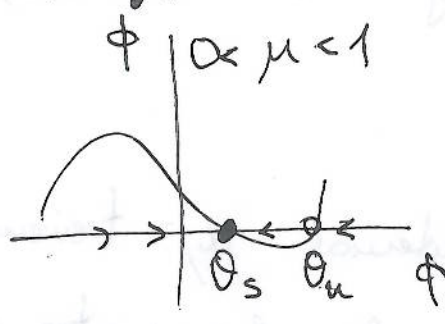
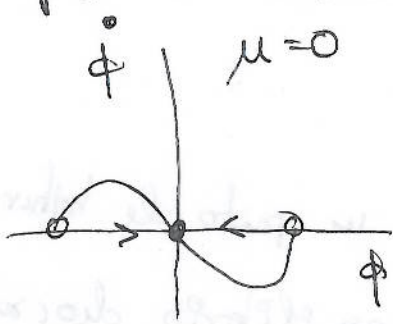
$$-1 \leq \mu \leq 1,$$

pues:

$\mu - \sin \phi_f = 0$  es la ecuación de los pts. fijos.



Si  $\mu$  es pequeño, se espera que los luciérnagas se acoplen al estímulo externo.



\* Notamos que si  $\mu = 0$ , entonces tenemos dos puntos fijos  $\phi_e = 0$  el cual es estable y  $\phi_e = \pi$ , el cual es inestable. Es decir, los luciérnagos se coordinan al estímulo externo de frecuencia  $\Omega = \omega$ , y oscilan simultáneamente.

\* Si  $0 < \mu < 1$ , tenemos dos puntos fijos:  $\phi_e = \theta_s$  estable y  $\phi_e = \theta_u$ , inestable, con  $\theta_s < \theta_u$ .

Notemos que todas las trayectorias tienden a:  $\theta_s$ :

$$\phi \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \theta_s$$

i.e.

$$(\theta - \theta) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \theta_s$$

es decir, la diferencia de fases tiende a una constante.

Se dice que las fases están ensincronizadas o en fase (una está corrida de la otra por una cantidad fija).

Es decir, las frecuencias del estímulo externo y de los luciérnagas es la misma, pero están desfasados por  $\theta_s$ .

Alfornos incrementamos  $\mu$ , tenemos un punto de bifurcación en  $\mu = 1$ , donde los dos puntos de equilibrio deoran, y desaparecen dejando "el cielo despejado" de puntos fijos (es un punto de bifurcación silla-nodo).

Tenemos entonces que para  $\mu > 1$ , la diferencia de fases,  $\phi = \theta - \theta_s$ , entre el estímulo y de los luciérnagas crece y crece ( $\dot{\phi} > 0$ ) hasta que se vuelven a emparejar, la diferencia de fases es

rápida si  $\phi \sim -\pi/2$  y lenta para  $\phi \sim +\pi/2$

El rango para el cual los luciérnagas se pueden "educar" (o condicionar) es:

$$\omega - A \leq \Omega \leq \omega + A.$$

Puesto que:

$$(-1 \leq \mu \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{\Omega - \omega}{A} \leq +1 \Rightarrow -A \leq \Omega - \omega \leq A)$$

06/23/2010.

Para  $\mu > 1$ , podemos calcular el periodo en que se reencontran las fases; es decir, cuando  $\phi$  cambió  $2\pi$ :

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\dot{\phi}} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\Omega - \omega - A \sin\phi}$$

Cmo a la sección 4.3:

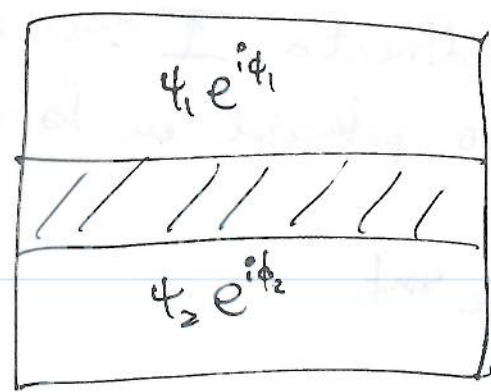
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(\Omega - \omega)^2 - A^2}}$$

El modelo de los luciónagos es más complicado, pero chequeen las referencias del texto.

### 4.6 Uniones superconductoras de Josephson

07/24/2010

Los uniones de Josephson son dispositivos superconductores capaces de generar voltajes oscilantes de frecuencias altas:  $\sim 10^{10}, 10^{11}$  Hz. Se necesita mecánica cuántica, pero se puede entender la dinámica en términos clásicos.



Superconductor #1,  
con función de onda  $\psi_1 e^{i\phi_1}$

← Acoplamiento débil: Aislante (Feynman, III)

Superconductor #2, con  
función de onda  $\psi_2 e^{i\phi_2}$

$\sim 10^{23}$  electrones tienen que ver en el efecto, pero se acoplan y sincronizan (como los neutrinos) de forma tal que una sola función de onda <sup>(macroscópica)</sup> es necesaria para cada superconductor. Estos superconductores se acoplan, de forma tal que adoptan la misma fase para minimizar la energía del sistema.

Aún cuando no haya <sup>una</sup> diferencia de potencial entre los dos superconductores, puede haber un efecto túnel en el sistema, de forma tal que los dos superconductores

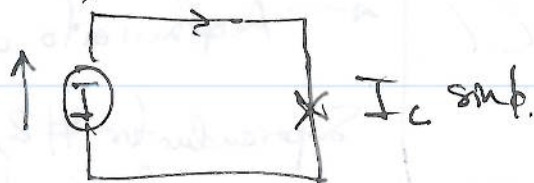
fases:  $\phi_j \sim$  momento de los electrones en el superconductor  $\#j$

Amplitudes:  $|\psi_j|^2 \sim$  masa de los electrones en el superconductor  $\#j$ .

Es decir, el momento de los electrones se acoplan.

### Modelo

Si se hace pasar una corriente directa  $I > 0$  a través delo unión de Josephson, habrá cierto potencial en la unión, dentro de ella.



$=108=$

No obstante, hay una corriente crítica,  $I_c$ , tal que si  $0 < I < I_c$  no hay un potencial generado en la unión: es decir, ¡no hay resistencia del material! Esto es, se presenta un efecto superconductor.

Los fases (momentum de los electrones) muestran entonces una diferencia constante:

$$\phi = \phi_2 - \phi_1,$$

donde  $\phi$  satisface la relación de Josephson corriente

$$I = I_c \sin \phi.$$

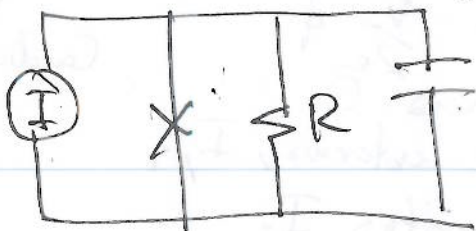
Esta ecuación quiere decir que la diferencia de fases aumenta si aumentamos la corriente que pasa por la unión de "Josephson".

Para  $I > I_c$ , se crea un potencial  $V$ , y las fases se separan como función del tiempo, y obedecen la relación:

$$V = \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hbar = \frac{h}{2\pi} \\ \hbar = \text{const. de Planck.} \\ e = \text{carga del electrón.} \end{array} \right.$$

Aplicando las leyes de Kirchhoff; para circuitos en paralelo:

(Ver Feynman III).



la suma de las corrientes en  $X$ ,  $R$  y  $C$ , es la corriente aplicada:  $I$ .

Recordando que; en el "anduvado" (unión de Joe)

$$Q = CV \Rightarrow I_1 = \dot{Q} = C\dot{V}$$

y además:

$$I_2 = \frac{V}{R}$$

También:

$$I_3 = I_c \sin \phi.$$

Entonces  $I_1 + I_2 + I_3 = I$

Corriente  
impuesta por  
lo pila. (⊕)

$$C\dot{V} + \frac{V}{R} + I_c \sin \phi = I.$$

is.  $\frac{1}{2e} C \ddot{\phi} + \frac{1}{2eR} \dot{\phi} + I_c \sin \phi = I.$

desde  $I$  es el parámetro externo (que define las bifurcaciones). el modelo

Notamos que es análogo al. del péndulo:

$$m h^2 \ddot{\theta} + b \dot{\theta} + m g h \sin \theta = \Gamma.$$

Péndulo.

Angulo  $\theta$

Velocidad angular  $\dot{\theta}$

Masa  $m$

Torque aplicado  $\Gamma$

Torque gravitacional  $mgh$

Unión de Joe

Diferencia de fase  $\phi$ .

Potencial  $\frac{1}{2e} \dot{\phi}$

Capacitancia  $C$

Corriente externa,  $I_1$

Corriente crítica  $I_c$

= (10) =

Damping const:

$b$

Conductancia

$1/R$

Análisis 2-dimensional,

$\tau \equiv \frac{2eI_c R t}{\hbar}$ , es el tiempo 2-dimensional;

entonces:

$$\beta \phi'' + \phi' + \sin \phi = \frac{I}{I_c},$$

donde  $\beta \equiv \frac{2eI_c R^2 C}{\hbar}$  y  $\frac{d}{d\tau} ( ) \equiv ( )'$ .

De igual modo, en el modelo de sobre amortiguamiento

$0 < \beta \ll 1$ , se tiene:

$$\phi' = \frac{I}{I_c} - \sin \phi.$$

De lo estudiado en el capítulo la sección 4.3,

$\phi$  oscila, si  $I > I_c$ ,

y

$\phi$  tiende a  $\phi_e$ , si  $I < I_c$ .

Ejemplo: Encontrar los curvas corriente-voltaje en el límite de sobre amortiguamiento, i.e., encontrar  $\langle V \rangle$ , como función de  $I$ : dibujar  $\langle V \rangle$  vs.  $I$ .

Soln:  $\langle V \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt.$

$T$  es el periodo de oscilación de  $V$ .

Encuentra:

y de aquí, en atrás:

$$\langle \dot{\phi}' \rangle = \frac{\hbar}{2e} \langle \dot{\phi} \rangle$$

Ahora:

$$\langle \dot{\phi} \rangle = \left\langle \frac{d\phi}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right\rangle$$

$$= \frac{2e I_c R}{\hbar} \langle \phi' \rangle$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{\hbar}{2e} \langle \dot{\phi} \rangle = \frac{\hbar}{2e} \frac{2e I_c R}{\hbar} \langle \phi' \rangle \\ &= I_c R \langle \phi' \rangle. \end{aligned}$$

Dos casos:

(a)  $I < I_c$ . Hay dos puntos fijos:

$$\phi_e = \text{Arccos} \left( \frac{I}{I_c} \right).$$

Para:  $-\frac{\pi}{2} \leq \phi_e \leq \frac{\pi}{2}$ , entonces  $\phi_f$  es el punto fijo estable

(b)  $I > I_c$ . No hay puntos fijos y el periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1}}$$



Calculamos:  $= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\phi}{dt} dt$

$$\langle \phi' \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\phi}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi}{T}$$

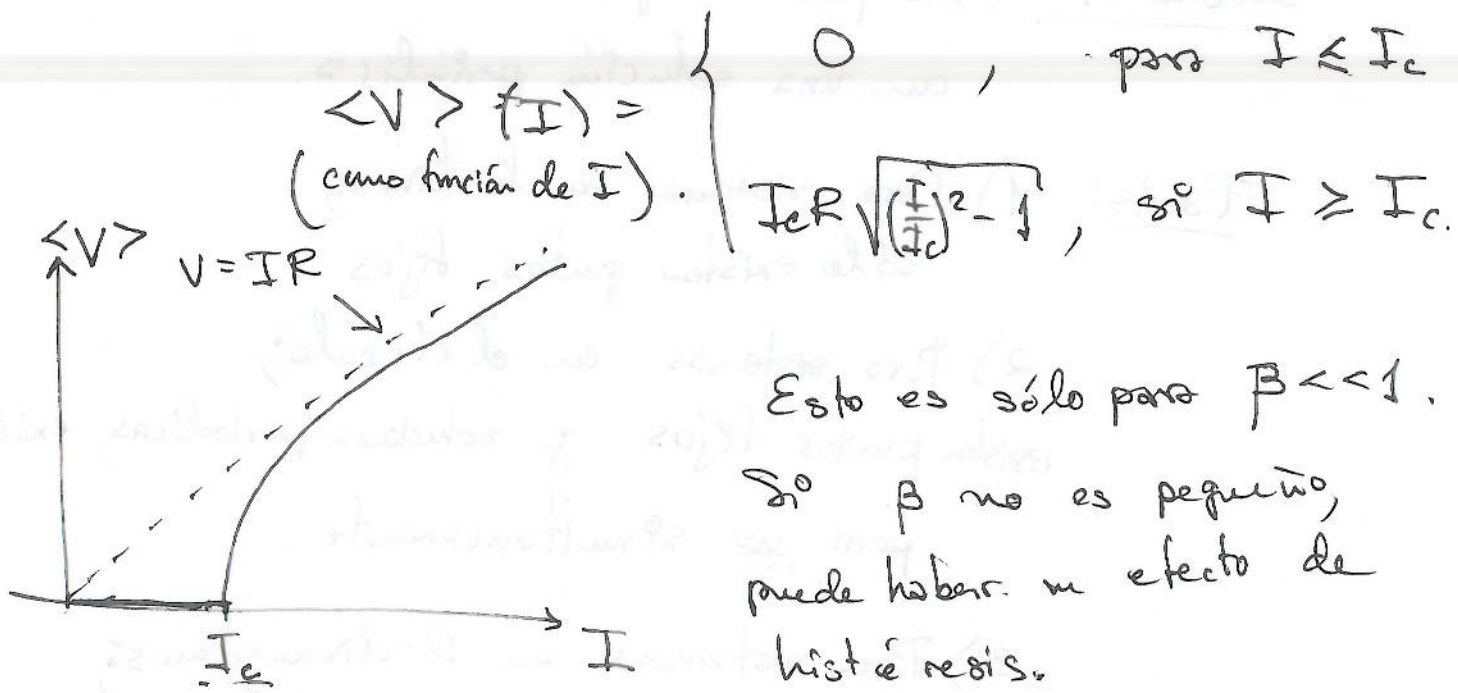
Entonces:

$$\langle V \rangle = I_c R \langle \phi' \rangle = 2\pi \frac{I_c R}{T} = 2\pi \frac{I_c R}{\left( \frac{2\pi}{\left( \frac{I}{I_c} \right)^2 - 1} \right)}$$

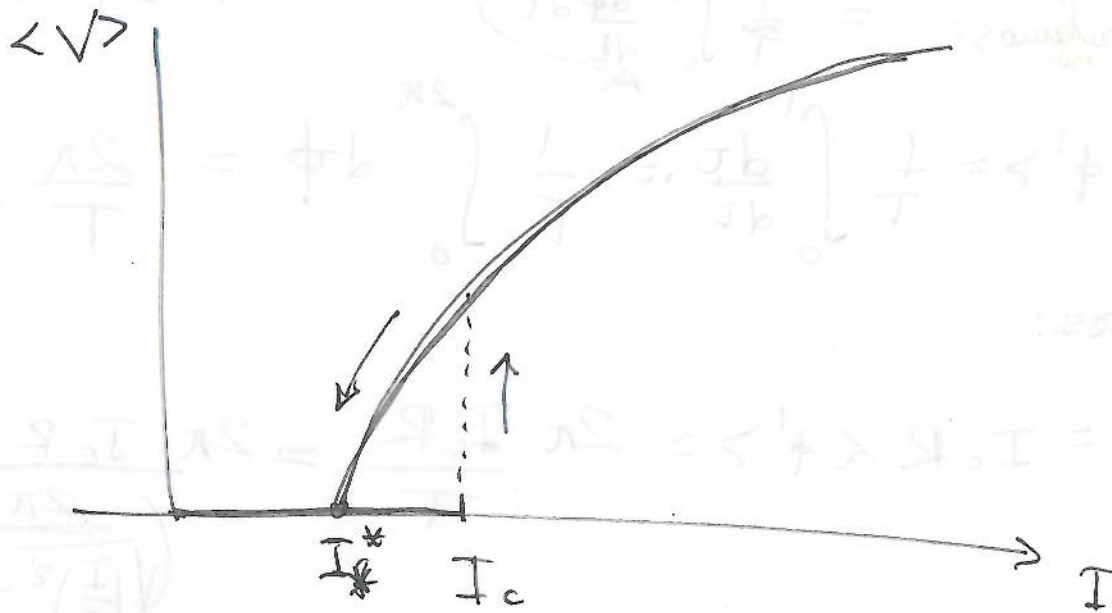
i.e.

$$\langle V \rangle = I_c R \sqrt{\left( \frac{I}{I_c} \right)^2 - 1}$$

Uniendo estos dos casos:



La histéresis se explica por el hecho de que  $\beta \neq 0$  es un tipo de inercia persistente, dada de forma similar cuando  $m \neq 0$ ,  $m \sim I$ .



Notamos que en el punto  $I^*$ , tenemos un punto de bifurcación del tipo tuerca.

Sección 8.5. Un punto de equilibrio estable coexiste con una solución periódica.

Facts: 1) Para sistemas en la línea:  
sólo existen puntos fijos

2) Para sistemas en el círculo:  
existen puntos fijos y soluciones periódicas,  
pero no simultáneamente.

3) Para sistemas en 2-dimensiones:  
existen puntos fijos y soluciones periódicas,  
y pueden existir simultáneamente