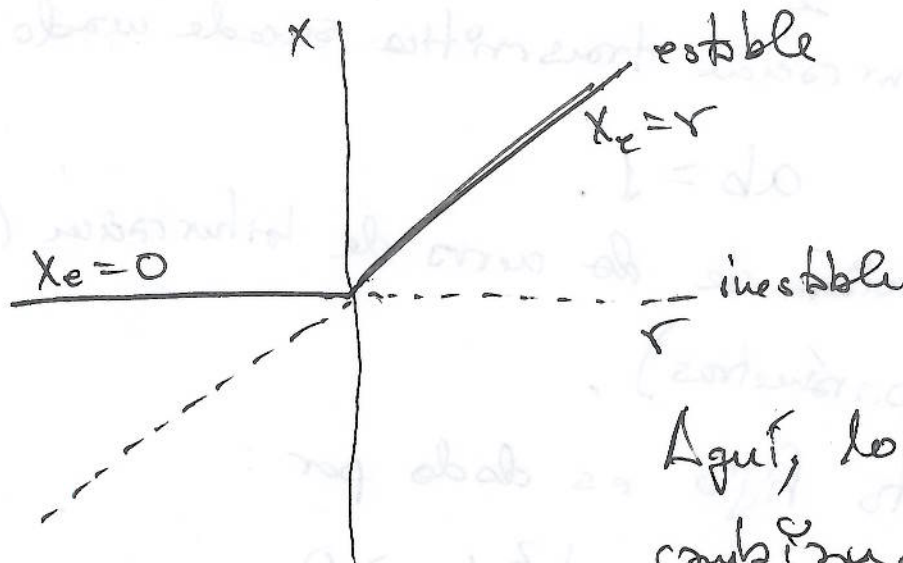


# Diagrama de bifurcación $x_e$ vs $r$ :

0330122009,



Intercambio  
de estabilidad  
entre  $x_e = 0$   
y  $x_e = r$ .

Aquí, los puntos fijos no  
cambian.

Ejemplo 1) Para el sistema:

$$\dot{x} = x(1-x^2) - a(1-e^{-bx})$$

Mostrar que  $x_e = 0$  tiene una bifurcación transcítica,  
cuando los parámetros  $(a, b)$  satisfacen cierta ecuación.  
Encuentra una expresión para el sistema dinámico  
cerca de la bifurcación.

Notemos que  $x_e = 0$  es un pto. fijo  $\forall (a, b)$

Creemos que entonces hay una bifurcación  
transcítica. Alrededor de  $x_e = 0$ :

$$\begin{aligned} 1 - e^{-bx} &= 1 - \left(1 - bx + \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3)\right) \\ &= bx - \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3). \end{aligned}$$

Entonces:

$$\dot{x} = x - \underbrace{x^3}_{\text{circled}} - abx + \frac{ab^2}{2}x^2 + O(x^3)$$

$$\dot{x} = (1-ab)x + \frac{ab^2}{2}x^2 + O(x^3)$$

Entonces, la bifurcación transcítica sucede cuando:

$$ab = 1.$$

Ésta es la ecuación de los curvas de bifurcación (en el espacio de parámetros).

El otro punto fijo es dado por:

$$(1-ab) + \frac{ab^2}{2}x_e = 0$$

$$\Rightarrow x_e = \frac{2(ab-1)}{ab^2}$$

Esto es válido para  $x_e \neq 0$ , lo cual implica que  $ab \neq 1$ , i.e., los parámetros deben de estar cerca de la curva de bifurcación.

Ejemplo 2: Muestra que el sistema:

$$\dot{x} = r \ln x + x - 1$$

tiene una bifurcación transcítica, y encontrar el punto de bifurcación,  $r_c$ . Escribir el sistema en forma normal  $\dot{x} = RX - x^2$  cerca de la bifurcación encontrar  $X$  y  $R$ , respecto a  $x$  y  $r$ .

Notemos que  $x_e = 1$  es un punto fijo  $\forall r \in \mathbb{R}$

Definimos

$$u \equiv x - 1,$$

03291209.

desde  $u$  es pequeño entonces.

$$\dot{u} = \dot{x} = r \ln x + x - 1$$

$$= r \ln(1+u) + u$$

$$= r \left( u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots \right) + u$$

$$= r u \left( 1 - \frac{u}{2} \right) + O(u^3) + u.$$

$$= (r+1)u - \frac{r}{2}u^2 + O(u^3).$$

The transcritical bifurcation occurs at  $r_c = -1$ .

Para hacerlo en forma normal: Sea  $u = av$ :

$$\dot{v} = (r+1)v - \frac{r}{2}a^2v^2 + O(v^3)$$

Definimos  $a \equiv \frac{2}{r}$ :

$$\dot{v} = (r+1)v - v^2 + O(v^3)$$

Entonces:

$$X \equiv v \quad \& \quad R = r+1$$

$$\Rightarrow \dot{X} = RX - X^2 + O(X^3).$$

con  $X = v = \frac{u}{a} = \frac{x-1}{\frac{2}{r}} = \frac{r}{2}(x-1)$

$$\boxed{\begin{aligned} R &\equiv r+1 \\ X &= \frac{r}{2}(x-1) \end{aligned}}$$

AB-



Está aproximación, puede ser una igualdad estricta  
Ver ejercicios 3.26. y 3.27.

y Guckenheimer - Holmes (1983)  
Wiggins (1990),  
Monneville (1990)

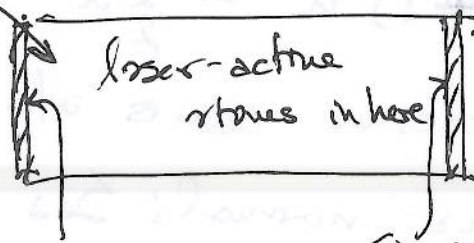
---

3.3 Laser Threshold.

3.3 Umbral del láser (Haken) (1983)

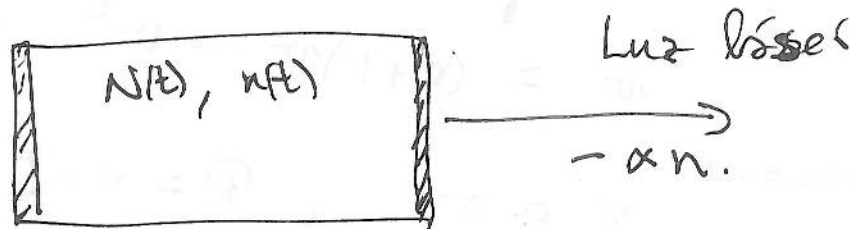
láser del estado sólido.

átomos susceptibles a fuente externa (bomba)



Semi-espejos.

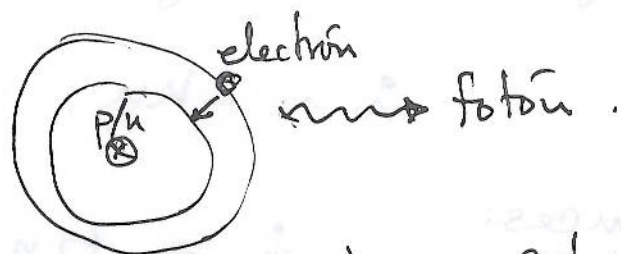
Bomba ↓ ↓ ↓ Energía externa (calor, campo magnético).



$n(t)$  - número de fotones emitidos

$N(t)$  - número de átomos excitados

Cada átomo es un "radiador", una vez que decae a su estado base:

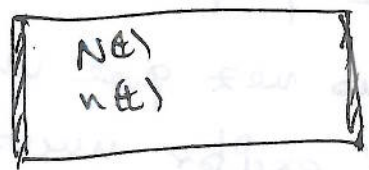


Cuando la fuente externa (bomba) es débil, los átomos emiten desfasados.

Llega un momento (umbral) que cuando la fuente es suficiente-mente fuerte, los átomos se "coordinan" y emiten todos a "la misma frecuencia", es decir, la radiación es coherente (una misma frecuencia) y muy intensa, creando lo que se conoce como rayo láser.

¿Cómo se efectúa este mecanismo? ..

$n(t)$  - número de fotones.



Razón de cambio de  $n(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{n}(t) &= \text{Ganancia} - \text{Pérdida} \\ &= G n N - k n. \end{aligned}$$

Los fotones ( ~~$n(t)$~~ ) dentro del material, hacen decaer a los átomos excitados, creando más fotones

$\dot{n} \sim G n N$ , i.e., entre más fotones,  $n(t)$ , más es la razón de cambio:  $\dot{n}$ .

y también, entre más átomos excitados  $N$  mayor es la razón de cambio  $\dot{n}$ .

El número de fotones que se pierden en los espejos semi-reflejantes es el flujo hacia afuera:

$$\dot{n} \sim -kn.$$

Entonces:

$$\dot{n} = G n N - kn.$$

Ahora bien, necesitamos una ecuación para  $N(t)$ :

Suponemos que inicialmente hay  $N_0$  átomos excitados.

Ahora bien, el número de átomos "des-excitados" es

igual al número de fotones emitidos,  $nt$ ;

Entonces, al tiempo  $t$ , el número de átomos excitados es:

$$N(t) = N_0 - (\# \text{ átomos des-excitados}).$$

$$= N_0 - \alpha n$$

donde  $\alpha$  es una constante de proporcionalidad.

(Se ha supuesto también que una vez que un átomo se des-excita, no se vuelve a excitar nuevamente).

Tenemos entonces:

$$\dot{n} = G n N - kn$$

$$= G n (N_0 - \alpha n) - kn.$$

$$= G N_0 n - G \alpha n^2 - kn.$$

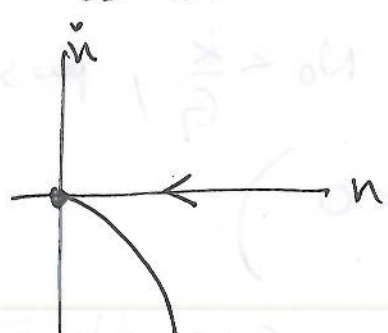
= 96 =



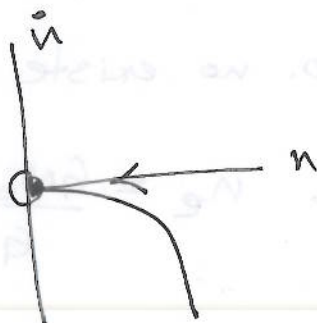
Lo cual toma una forma ya conocida:

$$\dot{n} = (GN_0 - k)n - G\alpha n^2$$

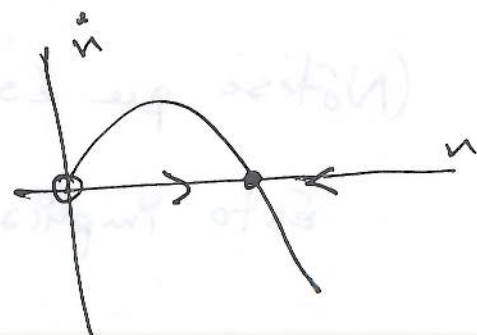
Notemos que  $n(t) \geq 0$ , ~~para~~ de acuerdo a que es un número de fotones, (nunca negativo).



$$N_0 < \frac{k}{G}$$



$$N_0 = \frac{k}{G}$$



$$N_0 > \frac{k}{G}$$

Tenemos entonces una bifurcación transcítica cuando la potencia de la fuente externa (bomba)  $N_0$  es suficientemente grande:

La bifurcación ocurre cuando:

$$GN_0 - k = 0,$$

i.e.

$$N_0 = \frac{k}{G}.$$

$$\text{Si } N_0 < \frac{k}{G} \Rightarrow GN_0 - k < 0 \Rightarrow \dot{n} < 0 \quad \forall t.$$

$\Rightarrow n_e = 0$  es el único punto de equilibrio y es estable.

El segundo punto de equilibrio es dado por:

$$(GN_0 - k) - G\alpha n_e = 0$$

$$\Rightarrow n_e = \frac{GN_0 - k}{G\alpha}$$

(Nótese que este pto. no existe si  $N_0 < \frac{k}{G}$ , pues esto implica que  $n_e = \frac{GN_0 - k}{G\alpha} < 0$ ).

En cambio, este punto aparece cuando:  $\frac{GN_0 - k}{G\alpha} \geq 0$ ,  
y existe para  $N_0 \geq \frac{k}{G}$ ,  
Léser threshold.

$$n_e = \frac{GN_0 - k}{G\alpha} > 0,$$

ie. existe para  $N_0 > \frac{k}{G}$ .

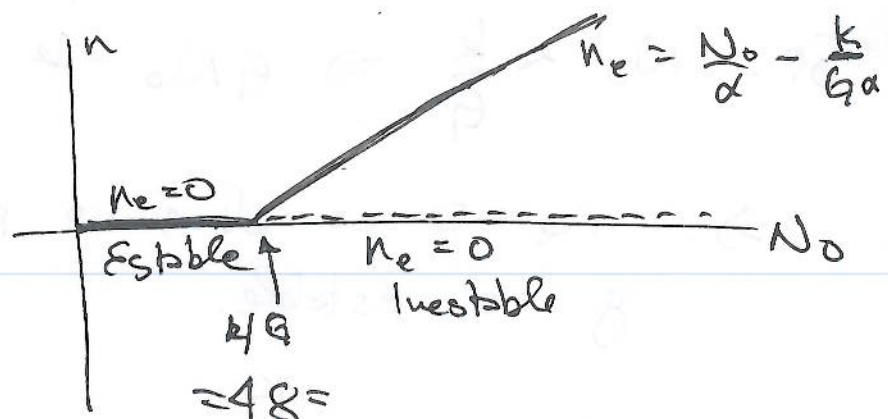
teniendo dos puntos fijos:

$n_e = 0$   
Inestable

y

$n_e = \frac{GN_0 - k}{G\alpha}$   
Estable

Diagrama  
de  
bifurcación



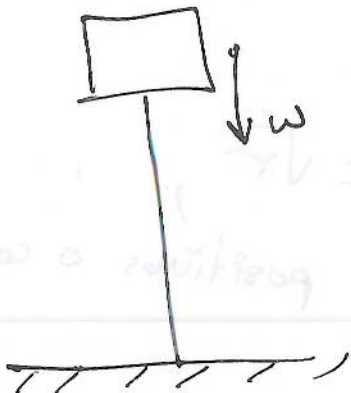


### 3.4 Pitchfork Bifurcation.

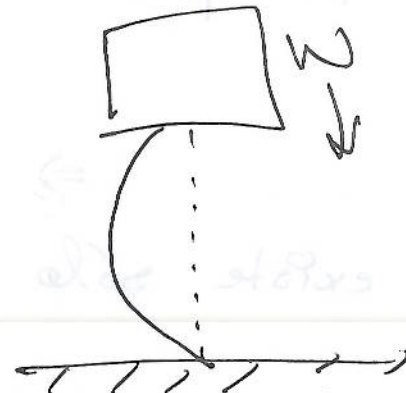
0330122009

#### Bifurcación de tenedor.

Es común en problemas físicos con simetrías. El ejemplo de la varilla y el peso es común.



Deflexión ~~zero~~.  
es estable



Deflexión a la izquierda  
(o derecha) son estables.  
La vertical es inestable.

Bifurcación de tenedor }  
Supercrítica.  
Subcrítica.

#### Bifurcación de tenedor Supercrítica.

La forma normal está dada por:

$$\dot{x} = r x - x^3.$$

Notemos que  $\dot{x} = (r - x^2)x$ .

Los puntos críticos satisfacen  $(r - x^2)x = 0$ .

Notemos que:

$$x_e = 0$$

es siempre un punto crítico, independientemente del valor de  $r$ .

El otro punto crítico está dado por:

$$r - x_e^2 = 0.$$

$$\Rightarrow x_e = \pm \sqrt{r},$$

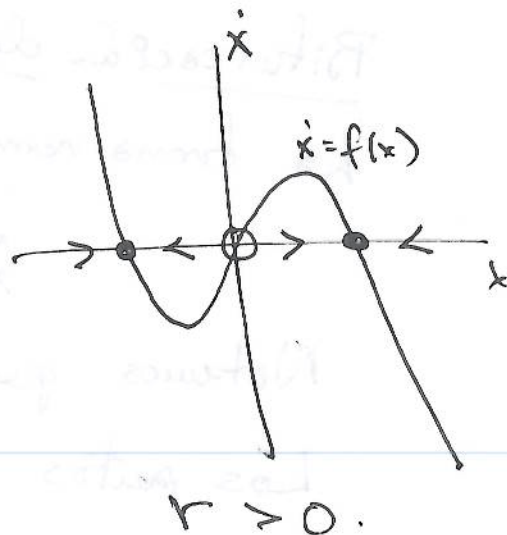
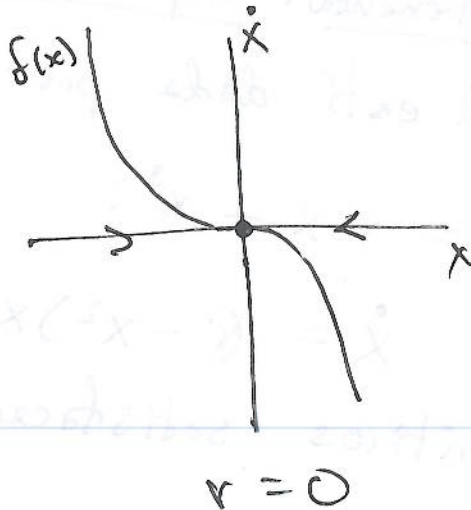
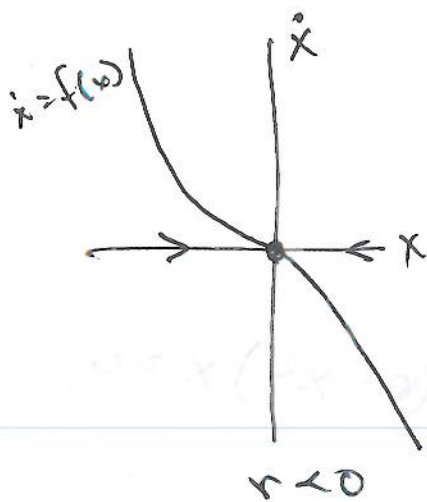
y existe sólo para valores positivos o cero de  $r$ .

$$r \geq 0.$$

Notemos además que  $x \rightarrow -x$  deja invariante la ecuación  $\dot{x} = (r - x^2)x$ .

Esta invarianza explica la simetría izquierda/derecha, que está dada también por  $x_e = \pm 0$  y  $x_e = \pm \sqrt{r}$ .

Notemos que  $\dot{x} = r x - x^3 = f_r(x)$ , para diferentes valores de  $r$ , es dado por:



=SO=

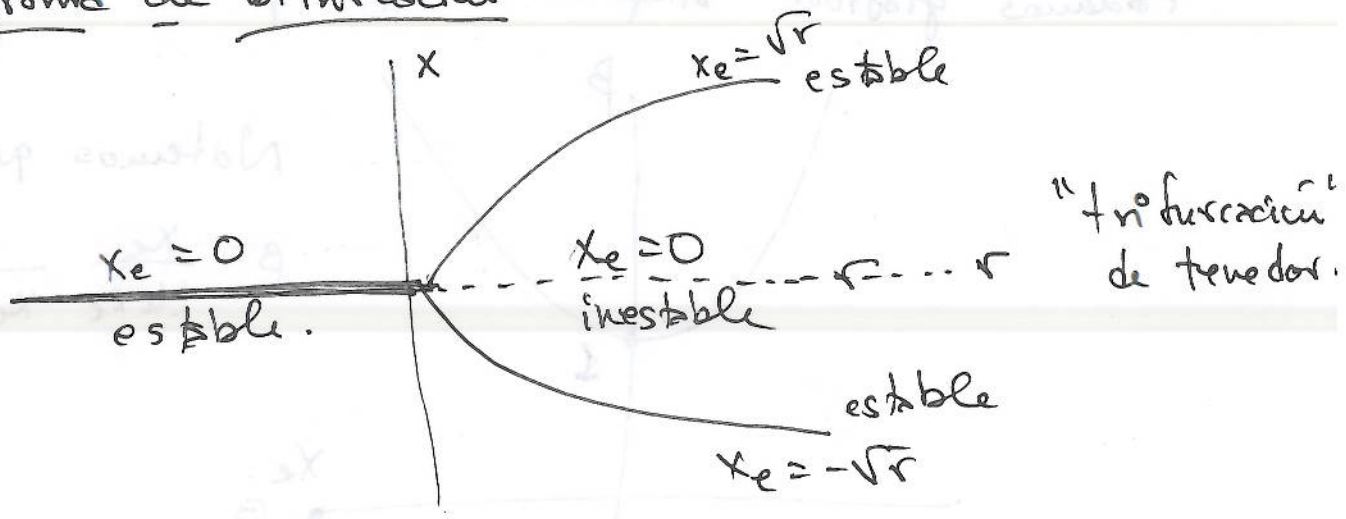
Notemos que para:

(a)  $r < 0$  : pto. fijo  $x_e = 0$  es estable

(b)  $r = 0$  : pto fijo  $x_e = 0$  es estable.

(c)  $r = 0$  : puntos fijos:  $x_e = -\sqrt{r}$  ; estable  
 $x_e = 0$  , inestable  
 $x_e = +\sqrt{r}$  , estable.

Diagrama de bifurcación



Ejemplo 1) Consideremos el sistema:

$$\dot{x} = -x + \beta \tanh x.$$

(Mecánica estadística de imanes y redes neuronales.

Ejercicio 3.6.7 y Palmer - 1989).

Mostrar que este sistema presenta una bifurcación de teneros supercrítica

Dibujar los puntos críticos para cada valor de  $\beta$ .



Notemos que:

$$x_e = 0$$

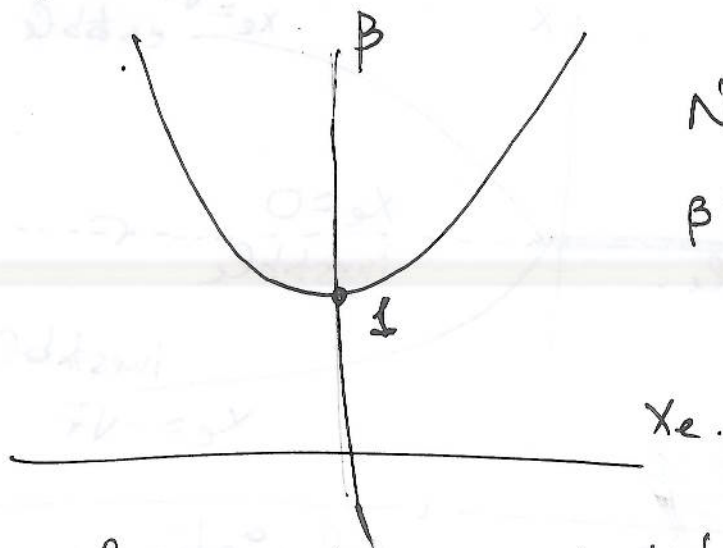
es solución de  $f_{\beta}(x) = -x + \beta \tanh x = 0$ ,  $\forall \beta \in \mathbb{R}$

Ahora, si  $x \neq 0$ :  $f_{\beta}(x_e) = 0$  implica:

$$\beta = \frac{x_e}{\tanh x_e}$$

pero no necesariamente podemos escribir  $x_e = x_e(\beta)$ .

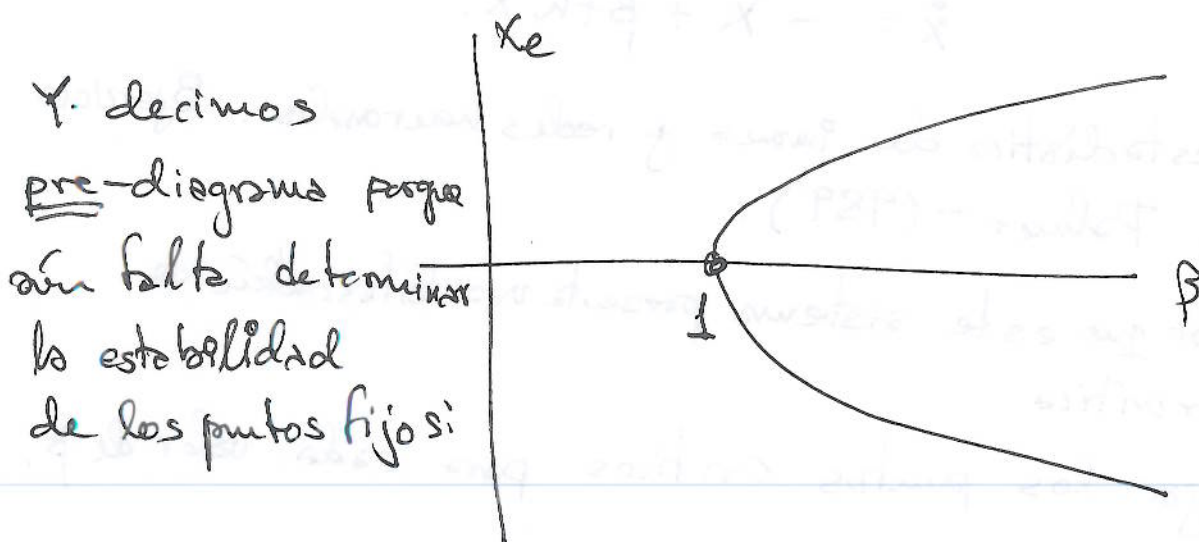
Podemos graficar simplemente  $\beta = \beta(x_e)$ :



Notemos que:

$$\beta = \frac{x_e}{\tanh x_e} \xrightarrow{x_e \rightarrow 0} 1$$

Por lo que el pre-diagrama de bifurcación queda:



Como mencionamos anteriormente,

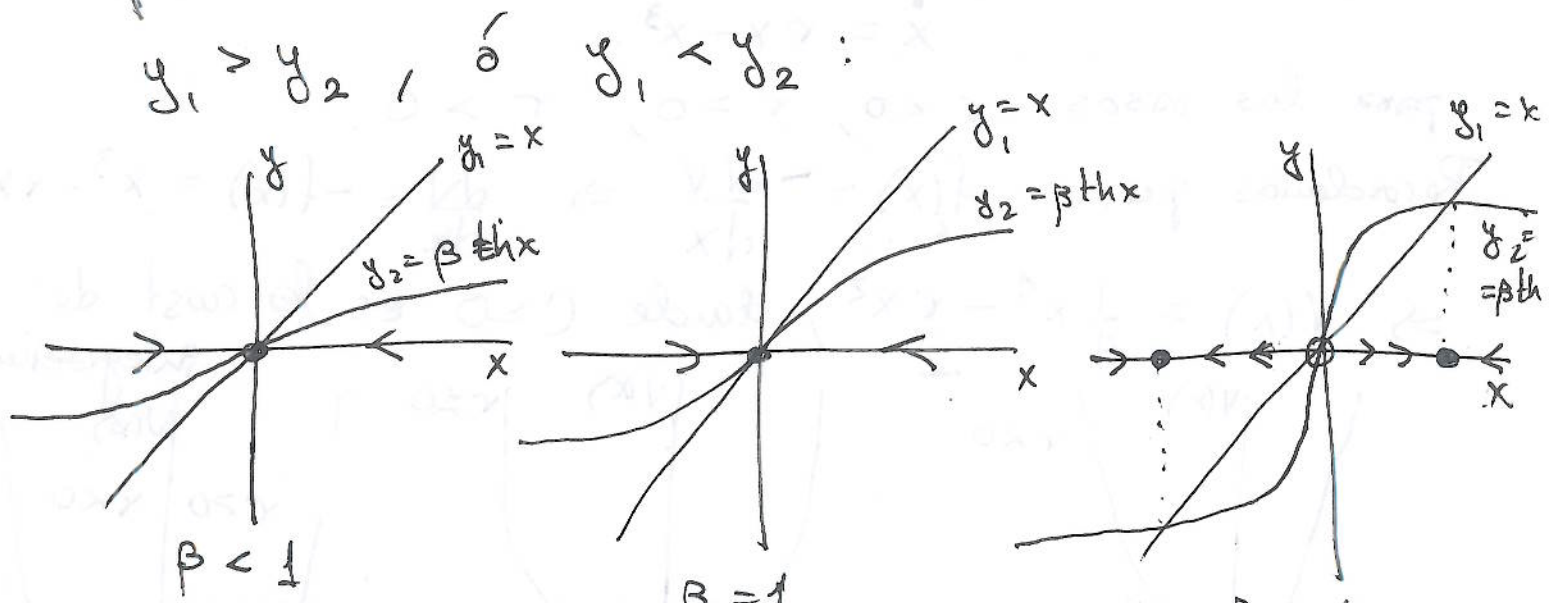
$x_e = 0$  es siempre  $(\forall \beta)$  un punto fijo.

Ahora bien, no tenemos del pre-diagrama de bifurcación que para  $\beta \leq 1$  tenemos únicamente un punto fijo, mientras que para  $\beta > 1$ , tenemos tres puntos fijos, siendo éste una "trifurcación".

Ahora bien, adoptemos el punto de vista anterior para determinar cuándo  $f_\beta(x) = -x + \beta \tanh x$  es positiva o negativa.

Dibujemos  $y_1 = x$   $\dot{x} = -y_1 + y_2$   
 $y_2 = \beta \tanh x$

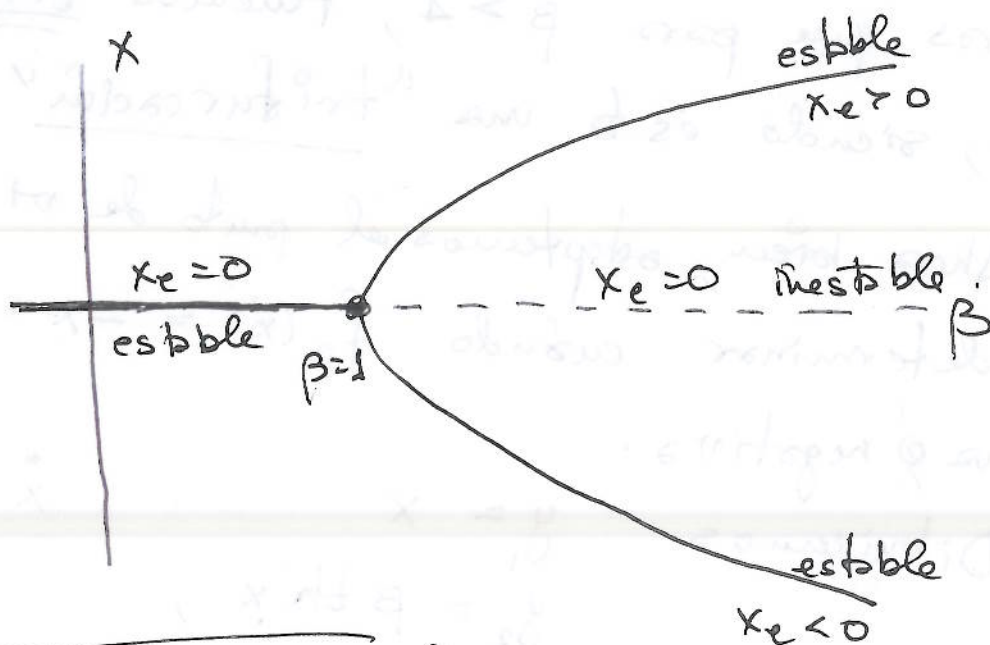
para diferentes valores de  $\beta$ , y chequeemos cuando  $y_1 > y_2$ , ó  $y_1 < y_2$ :



$x > 0, y_1 > y_2 \Rightarrow \dot{x} < 0$   
 $x < 0, y_1 < y_2 \Rightarrow \dot{x} > 0$

(Igual  $\beta < 1$ )

Notemos que para  $\beta > 1$ , el comportamiento es más complicado, y se generan 2 pts fijos estables, mientras que el origen es un punto fijo que se transformó en inestable. El diagrama (ahora sí) de bifurcación queda:



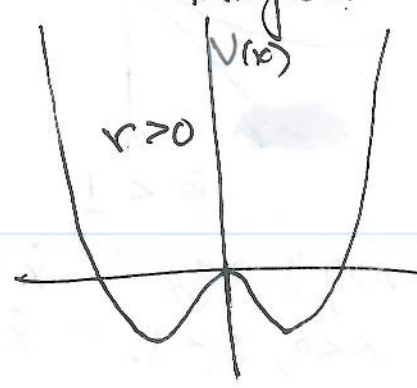
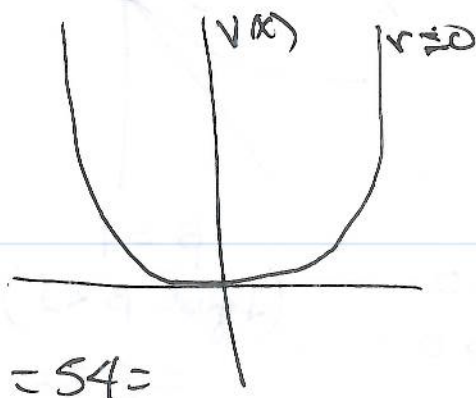
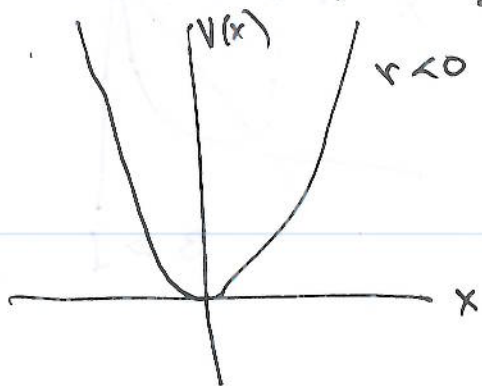
Ejemplo Dibujar el potencial  $V(x)$  para el sistema:

$$\dot{x} = rx - x^3.$$

para los casos  $r < 0$ ,  $r = 0$ ,  $r > 0$ .

Recordemos que:  $f(x) = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -f(x) = x^3 - rx$

$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{r}{2}x^2$ , donde  $C=0$  es la const. de integración.





\* Notemos que para  $r \leq 0$ ,  
un solo punto fijo existe,  $x_e = 0$ , y es estable,  
por ser mínimo de  $V(x)$

\* No obstante, para  $r > 0$ ,  $V(x)$  tiene un  
máximo local en  $x_e = 0$ , que es pto. fijo inestable  
y dos mínimos simétricos, que son pts. fijos  
estables

Bifurcación de tener subcrítica.

El caso super-crítico es estabilizador.

En cambio, el subcrítico es desestabilizador; y está  
dado por el sistema:

$$\dot{x} = rx + x^3.$$

Aquí, el diagrama de bifurcación se mira diferente:

Pts. fijos:  $f_r(x) = 0$

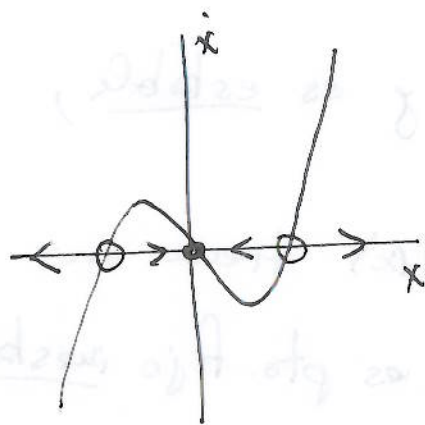
$$(r + x_e^2)x_e = 0$$

$$x_e = 0$$

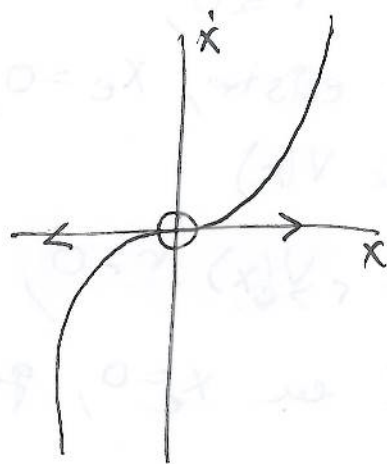
$$x_e^2 = -r$$

↖ Válido  $\forall r \in \mathbb{R}$ .

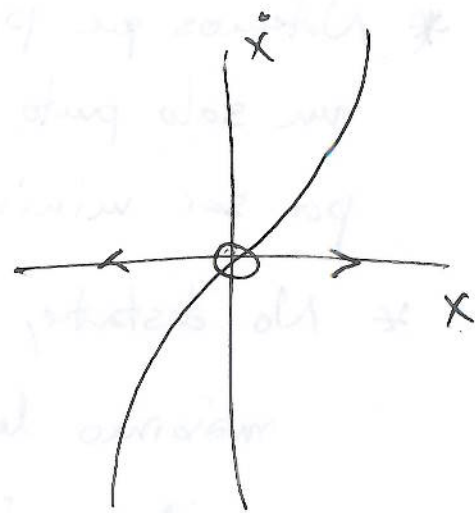
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_e = 0 \\ x_e = -\sqrt{-r} \\ x_e = +\sqrt{-r} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Válidos sólo} \\ \text{para } r < 0. \end{array}$$



$r < 0$

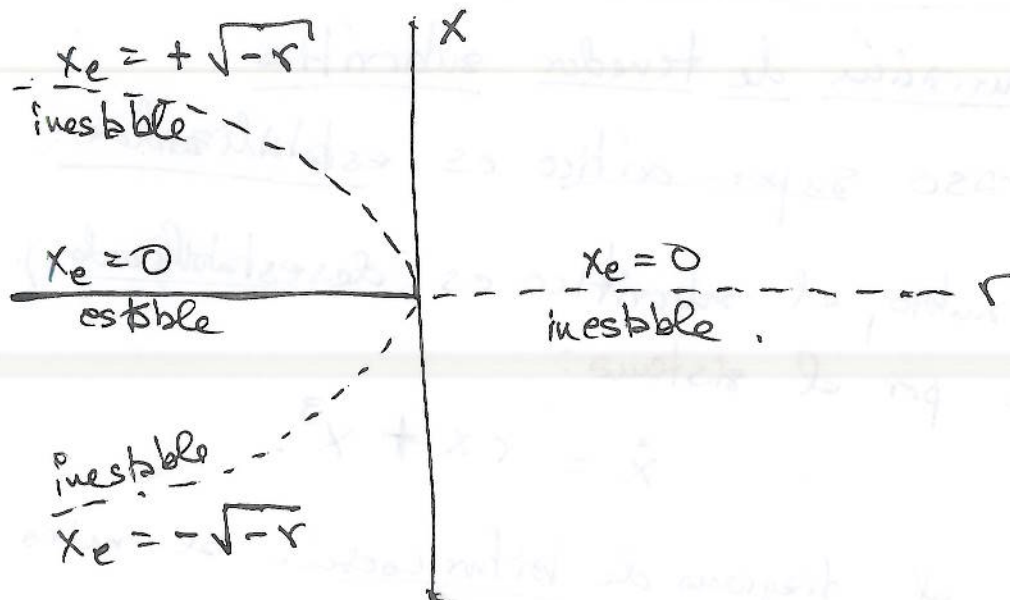


$r = 0$



$r > 0$

De forma tal que el diagrama de bifurcación es:



Notamos que para  $r > 0$ , el término cúbico (en vez de detener el crecimiento de  $x$ , como es el caso supercrítico) ayuda a que explote la solución.

Esta discontinuidad infinita se alcanza incluso para un tiempo  $t$  finito (Ejercicio 2.5.3).

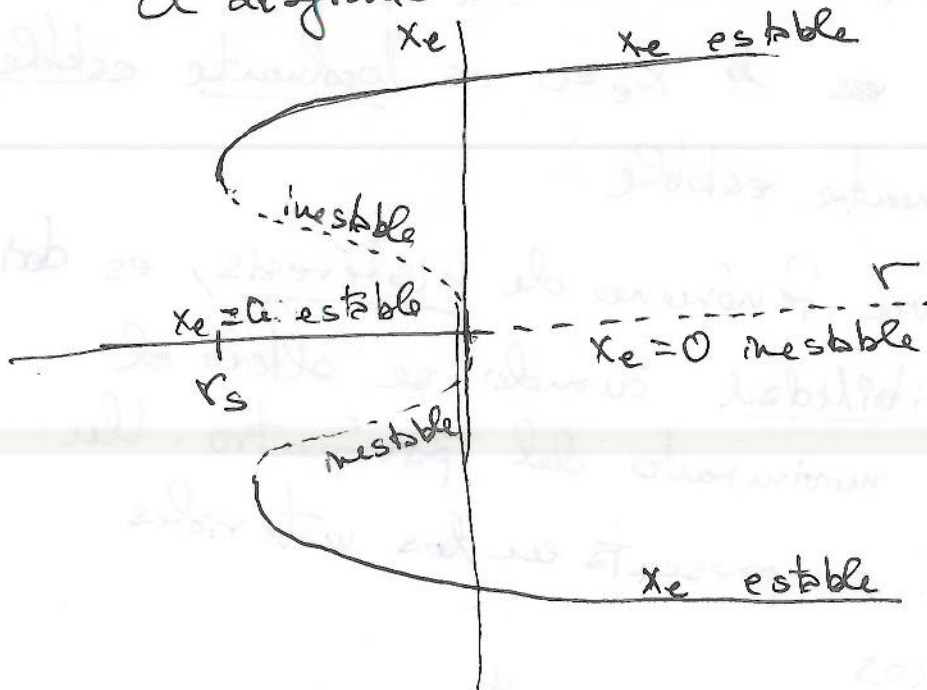
04123109.

Si se consideran términos de orden mayor, tal discontinuidad infinita (blow-up at finite time), puede ser contrarrestada

Assumiendo ~~la~~ la simetría  $x \rightarrow -x$ , el siguiente término que balancea la explosión es  $+x^5$ :

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5.$$

El diagrama de bifurcación es como sigue (3.4.14 y 3.4.15)



Para  $x \approx 0$ , el diag. se ve como el caso subcrítico (dado que el término quintico es despreciable).

Para  $r > 0$  y  $x \approx 0$ ,  $x_e = 0$  es estable

Para  $r < 0$  y  $x \approx 0$ ,  $x_e = 0$  es estable, y a la vez se genera dos ramas inestables.

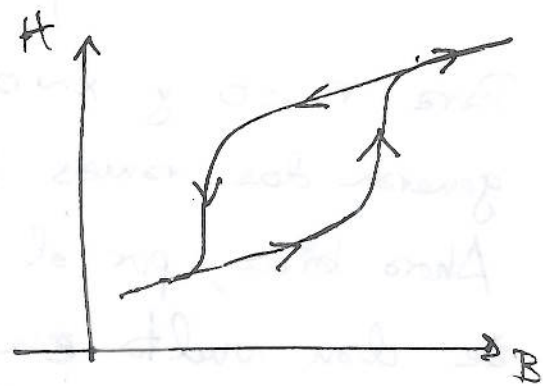
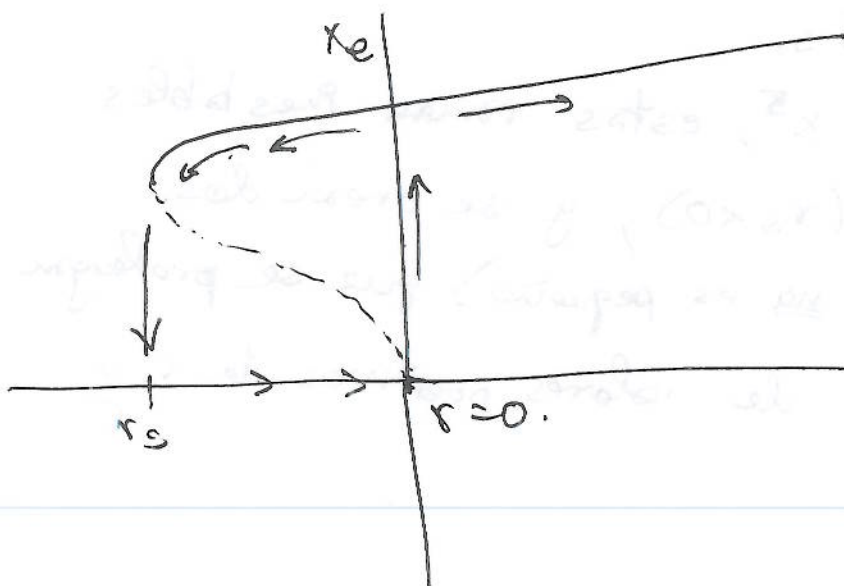
Ahora bien, por el término  $x^5$ , estas ramas inestables se dan vuelta en  $r_s$  ( $r_s < 0$ ), y se crean dos ramas estables (ahora  $x$  no es pequeño) que se prolongan para  $r > r_s$ , y atravesamos de valores positivos de  $r$  y en adelante.



Estos ramos se les llama de amplitud grande.

1) En el rango  $r_s < r < 0$ , existen 5 puntos fijos, dos de los cuales son inestables; y tres son estables. La condición inicial  $x_0$  nos dice a qué punto fijo las soluciones tienden cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Nótese que  $x_e = 0$  es estable para perturbaciones pequeñas, i.e.,  $x_e = 0$  es localmente estable pero no globalmente estable.

2) Se presenta un fenómeno de histéresis, es decir, no hay reversibilidad cuando se altera el sentido del movimiento del parámetro. Este fenómeno así se presenta en los materiales ferromagnéticos.



H - campo magnético dentro del material.

B - Campo magnético externo (parámetro que podemos variar).

3) La bifurcación en  $r_s$  es una bifurcación 04123109  
silla-nodo, dado que para  $r < r_s$ , no hay pto.  
fijo alguno, y para  $r > r_s$  dos puntos fijos  
(silla y nodo) surgen creados.

### Nomenclatura.

\* Supercritical pitchfork  $\equiv$  forward bifurcation,  
 $\equiv$  soft or safe bifurcation.  
Relacionado con transiciones de fase continuas

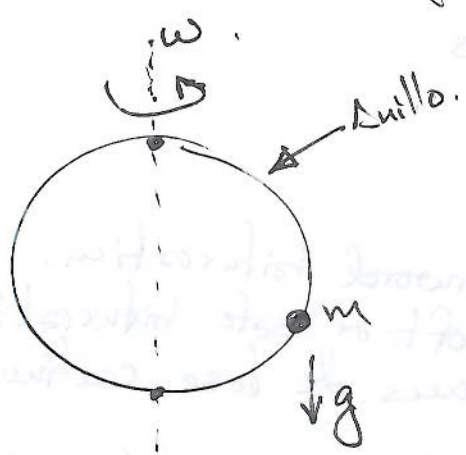
o de segundo orden en mecánica estatica

\* Subcritical pitchfork = inverted or backward  
bifurcation  
= hard or dangerous bifurcation  
Relacionado con transiciones de fase discontinuas  
o de primer orden

---

3.5 Cuenta sobre amortiguada en un anillo giratorio 06010210.

- Bifurcaciones en sistemas mecánicos
- Límites singulares (Ley de Newton: 2<sup>nd</sup> order  $\rightarrow$  1<sup>st</sup> order)



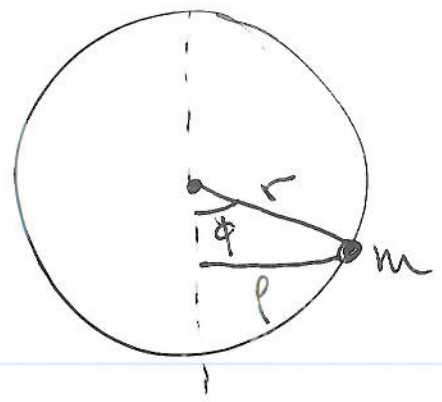
El anillo gira a una velocidad angular  $\omega$ , y tiene un radio  $r$ .  
 $\omega$ , y  $r$  son constantes.

Problema:

1) Analizar el movimiento de la cuenta (que se desliza a lo largo del anillo), que tiene masa  $m$ , y que está sujeto a dos fuerzas (a) la gravedad, y (b) la centrífuga, de lado a la rotación de anillo.

2) Suponemos, además, que la fricción de la cuenta con el anillo es muy grande.

Configuración del sistema:



De acuerdo con la figura.  
 $r$  - radio del anillo.  
 $\phi$  - ángulo con la vertical que forma el vector posición de la cuenta.  
 $l$  = proyección del radio vector en la horizontal

Domnio:  $-\pi \leq \phi \leq \pi$

$\approx 60 =$



Ley de Newton:

08/02/2010.

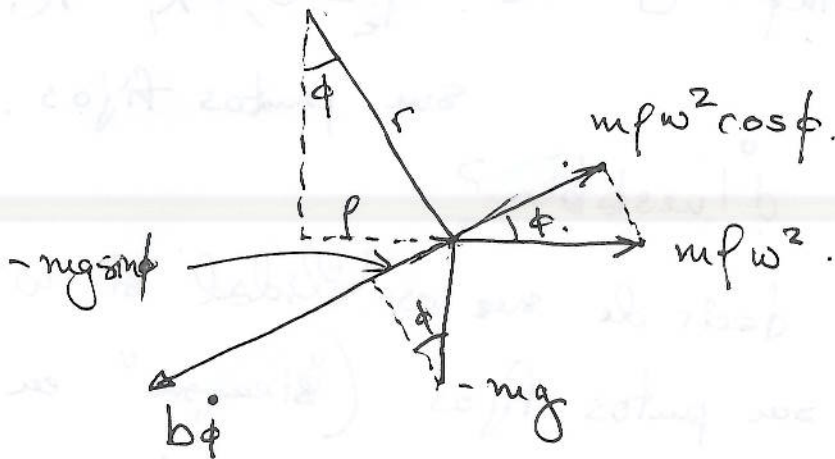
$$m \cdot a = \sum \text{fuerzas} = F_1 + F_2 + F_3$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \text{fuerza de fricción} = \text{se opone al movimiento y} \\ &= -\tilde{b}v = -\tilde{b}r\dot{\phi} \\ &= -b\dot{\phi} \end{aligned}$$

es proporcional a la velocidad tangencial, pues la fricción es tangencial

$$\begin{aligned} F_2 &= \text{fuerza de gravedad} = \text{Es la componente o proyección} \\ &= -mg \sin \phi. \end{aligned}$$

de la gravedad sobre la tangente



$$\begin{aligned} F_3 &= \text{fuerza centrífuga} = \text{masa} \cdot (\text{radio de rotación}) \cdot (\text{velocidad angular})^2 \\ &= m r \omega^2. \end{aligned}$$

Entonces la ley de Newton es:

$$m r \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -b \dot{\phi} - mg \sin \phi + m r \omega^2$$

Cuando los efectos inerciales son "despreciables" (ver adelante, para incluir el concepto de altamente amortiguado), tenemos que podemos desprestigiar el término de 2<sup>a</sup> derivada

$$b \ddot{\phi} = -mg \sin \phi + mr \omega^2 \sin \phi \cos \phi$$

$$b \dot{\phi} = mg \sin \phi \left( \frac{r \omega^2}{g} \cos \phi - 1 \right)$$

Puntos fijos:

$$(a) \sin \phi = 0 \Rightarrow \phi_e = 0, +\pi, -\pi.$$

son puntos fijos.

¿Son estables? ¿Inestables?

¿Qué se puede decir de su estabilidad si  $\omega = 0$ ?

Estos siempre son puntos fijos ("siempre" en el sentido de que no importa si los parámetros  $m, g, b, r, \omega$  son variables).

(b) Puntos fijos adicionales si:

$$\frac{r \omega^2}{g} \cos \phi_e - 1 = 0.$$

ie.

$$\frac{r \omega^2}{g} \cos \phi_e = 1.$$

Notese que si

$$\frac{r \omega^2}{g} < 1, \text{ no hay}$$

puntos fijos adicionales.

Nótese que esta última desigualdad lo que ~~está~~ indica es que, para velocidades angulares suficientemente pequeñas, solamente se tienen 2 puntos fijos:

(c) Ahora bien; si:

$$\frac{r\omega^2}{g} > 1,$$

la ecuación:

$$\frac{r\omega^2}{g} \cos \phi_e = 1, \tag{*}$$

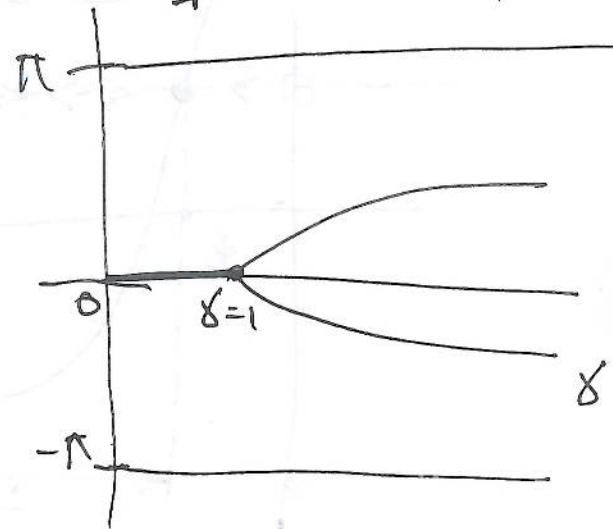
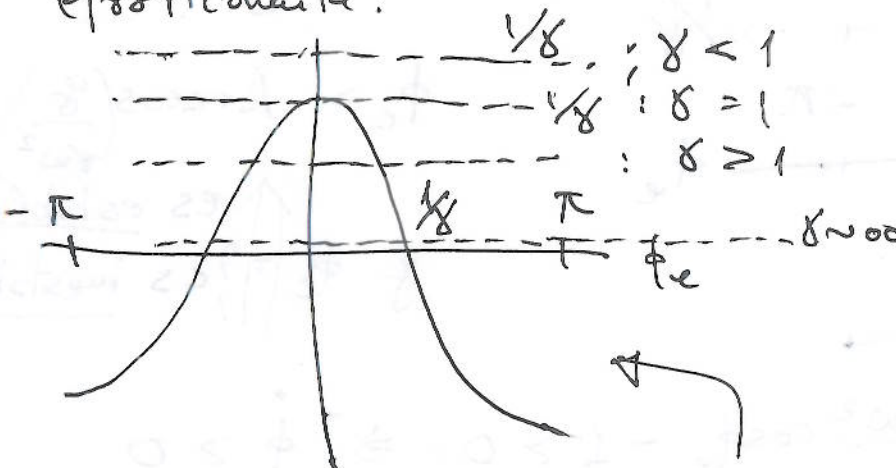
admite soluciones, es decir, si el anillo gira suficientemente rápido.

Definamos: 
$$\gamma \equiv \frac{r\omega^2}{g}$$

La ecuación (\*) se convierte en:

$\cos \phi_e = \frac{1}{\gamma}$  i.e.  $\phi_e = \pm \arccos \frac{1}{\gamma}$  pre-diagrama de bifurcación

Gráficamente:



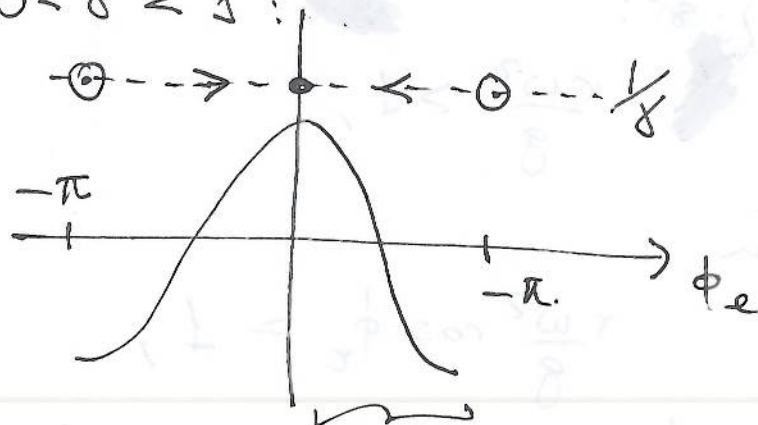
Notemos que hay una bifurcación en  $\gamma = 1$ , del tipo Furcador. Falta estudiar estabilidad, para ~~señalar~~ dibujar el diagrama de bifurcación.



⊗ Consideremos el caso  $0 < \phi < +\pi$ .

Así pues,  $\sin \phi > 0$ .

⊗ Si  $0 < \gamma < 1$ :

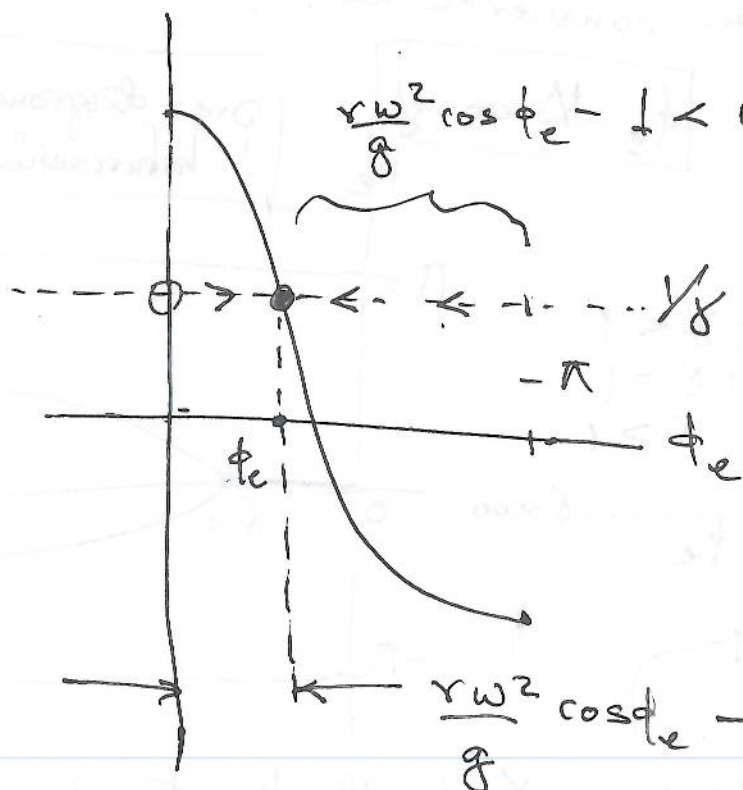


$$\frac{r\omega^2}{g} \cos \phi_e - 1 < 0.$$

Entonces:  $\dot{\phi} < 0$ . Así  $\phi_e = 0$  es estable.

$\phi_e = \pm\pi$  son inestables

⊗ Si  $1 < \gamma$ .



$$\frac{r\omega^2}{g} \cos \phi_e - 1 < 0 \Rightarrow \dot{\phi} < 0.$$



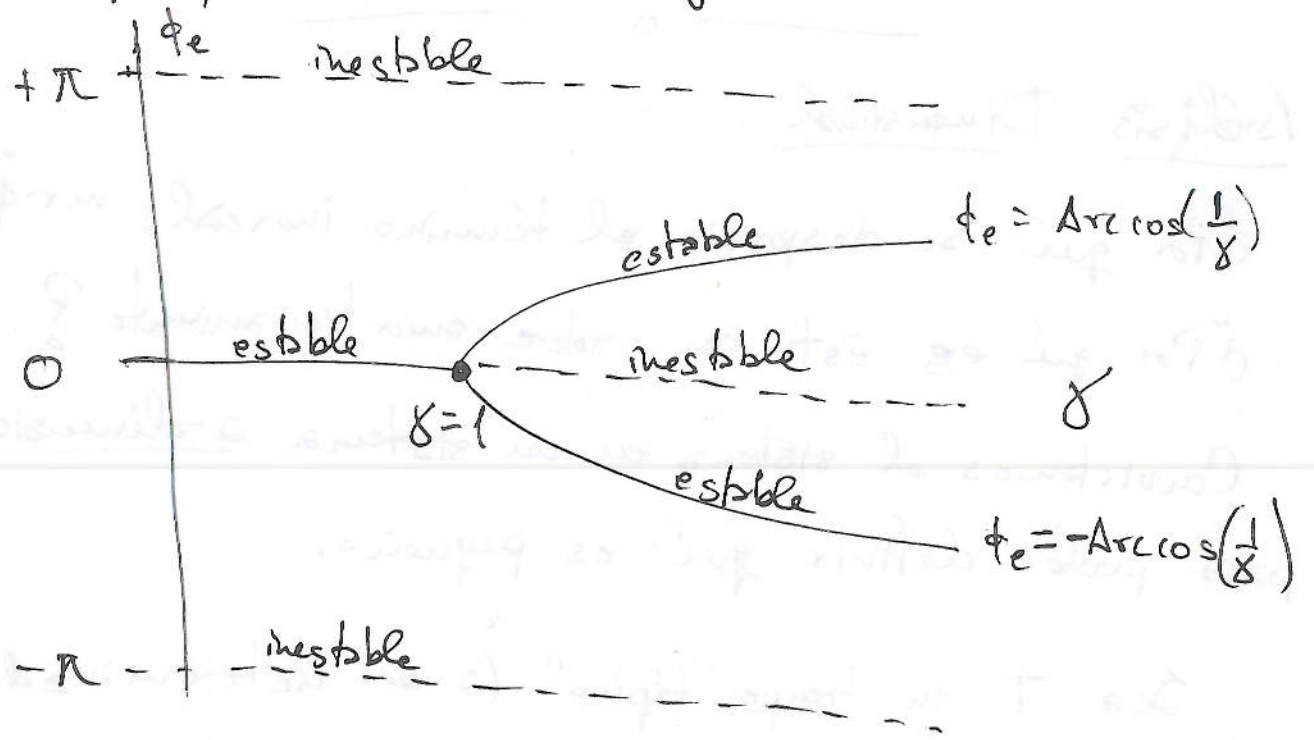
$\phi_e = \text{Arccos}\left(\frac{g}{r\omega^2}\right)$   
es estable!  
y  $\phi_e = 0$  es inestable

$$\frac{r\omega^2}{g} \cos \phi_e - 1 > 0 \Rightarrow \dot{\phi} > 0$$

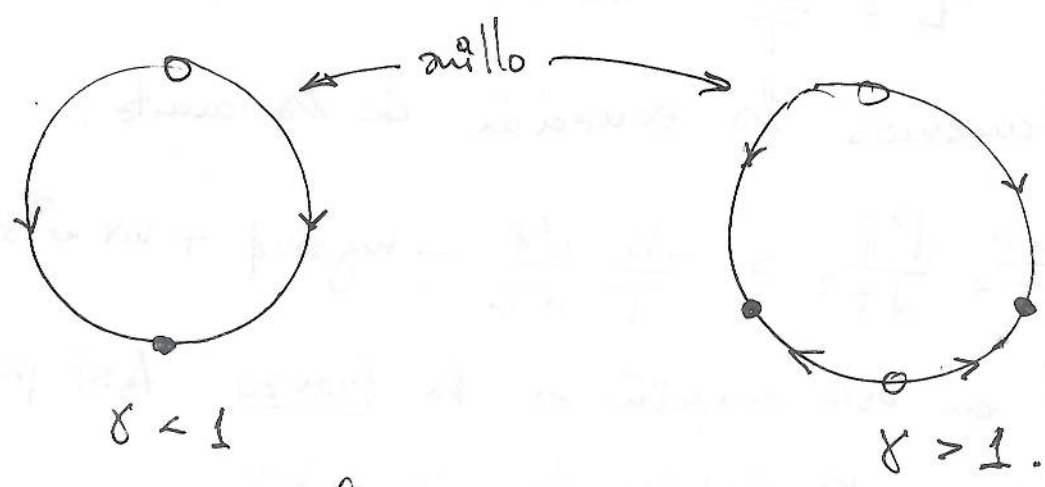
De igual forma, se puede analizar el caso cuando,

$-\pi < \phi < 0$  (Ejercicio: Hacer análisis de estabilidad lineal)

Así pues, tenemos el diagrama de bifurcación.



Se tiene una bifurcación de tenedor supercrítica.



Pts fijos

$\phi_e = \pm \pi$  inestable  
 $\phi_e = 0$  estable

Interpretación física Cuando gira lentamente:

Cuando gira más rápidamente: {  
 $\phi_e = \pm \pi$  inestables;  
 $\phi_e = 0$  inestable;  
 $\phi_e = \pm \text{Arccos}(\frac{g}{r\omega^2})$  estables.

Para  $\gamma > 1$ , cualquier desviación (por pequeña que sea), la cuenta se ~~mueve~~ mueve de  $\phi_e = 0$

$$\phi_e = \pm \Delta \arccos\left(\frac{g}{r\omega^2}\right)$$

### Análisis Dimensional

¿Por qué se desprecia el término inercial:  $m r \ddot{\phi}$ ?

¿Por qué es esto con sobre-amortiguamiento?

Convertimos el sistema en un sistema 2-dimensional, para poder definir qué es pequeño.

Sea  $T$  un tiempo "típico" (a ser determinado).

Definimos  $\tau = \frac{t}{T}$  la variable temporal 2-dimensional.

Así pues, tenemos la ecuación de la cuenta:

$$\frac{m r}{T^2} \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\frac{b}{T} \frac{d\phi}{d\tau} - mg \sin\phi + m r \omega^2 \sin\phi \cos\phi$$

La unidad en esta ecuación es la fuerza. Así pues, dimensionalicemos ~~lo~~ dividiendo por  $mg$ :

$$\frac{r}{g T^2} \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\frac{b}{mg T} \frac{d\phi}{d\tau} - \sin\phi + \frac{r \omega^2}{g} \sin\phi \cos\phi$$



Suponemos que los términos

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}, \frac{d\phi}{dt}, \sin\phi, \sin\phi \cos\phi$$

son todos del  $O(1)$ .

Ahora bien, en la última ecuación (página 66) aparece:

$$\gamma \equiv \frac{r\omega^2}{g}$$

$$\frac{r}{gT^2} \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{b}{mgT} \frac{d\phi}{dt} - \sin\phi + \gamma \sin\phi \cos\phi.$$

Queremos ahora que:  $\frac{r}{gT^2}$  sea pequeño, y que:

$$\frac{b}{mgT} = 1 \quad (\text{i.e., sea del orden } O(1)).$$

$$\Rightarrow T \equiv \frac{b}{mg}$$

define el tiempo típico,  
o el tiempo característico  
del sistema.

Ahora bien, pedimos que

$$\frac{r}{gT^2} \ll 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{g} \left(\frac{1}{T}\right)^2 \ll 1$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 r g}{b^2} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m^2 r g \ll b^2} \quad \text{y esto es lo que quiere}$$

decir: 1) sobre-amortiguado

2) el término inercial es despreciable.

se introduce ahora un parámetro pequeño:

$$\epsilon = \frac{m^2 g r}{b^2}$$

Así pues:

$$\epsilon \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\frac{d\phi}{d\tau} - \sin \phi + \gamma \sin \phi \cos \phi. \quad (*)$$

Notemos que tenemos dos parámetros a nuestra disposición:  $\epsilon, \gamma$ .

(el contenido del sistema anterior:  $m, g, r, \omega, b$  con 5 parámetros libres).

En el límite sobre mencionado:  $\epsilon \rightarrow 0, \gamma$  así.

$$\frac{d\phi}{d\tau} = f(\phi), \quad (**)$$

$$\text{con } f(\phi) = -\sin \phi + \gamma \cos \phi \sin \phi.$$

$$= \sin \phi (\gamma \cos \phi - 1).$$

Problema: El sistema (\*) requiere dos constantes de integración

y el sistema (\*\*) requiere sólo una constante de integración.

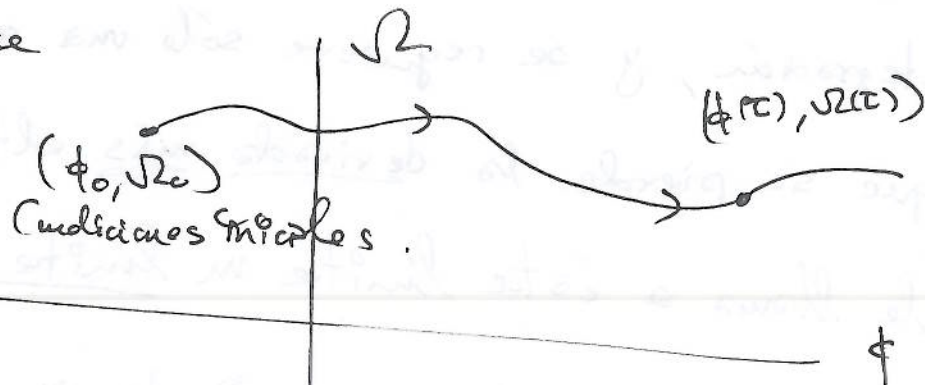
¿Cómo resolver esta discrepancia?

06 0201 2010  
 Escribamos el sistema (\*) del siguiente modo:

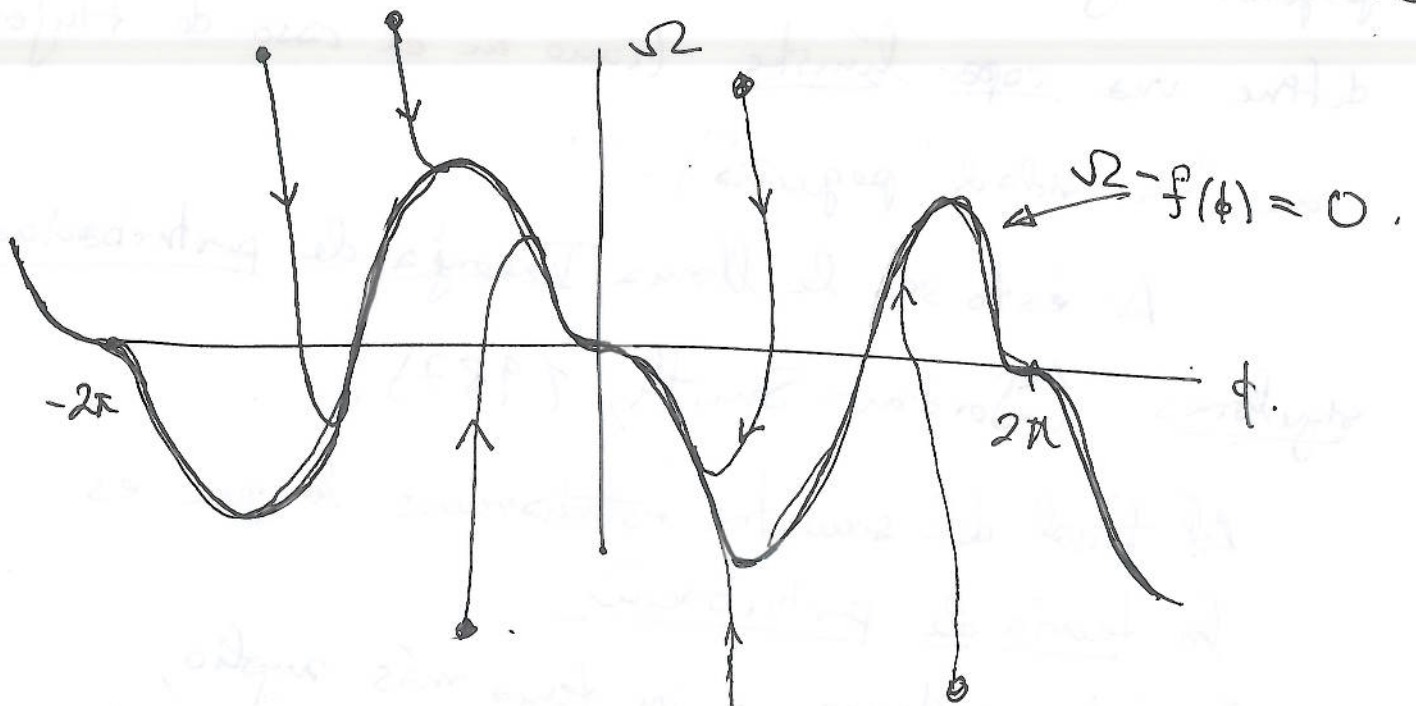
$$\frac{d\phi}{dt} = \Omega$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} (f(\phi) - \Omega)$$

Espectro fase



Para el sistema  $\varepsilon < 0$ , dibujemos varias condiciones iniciales



Notamos que rápidamente tiende a la curva  $\Omega - f(\phi) = 0$ , es decir, hay un "estado transitorio", que es para tiempos iniciales  $t \sim 0$ .



Es decir, se tiene una capa límite alrededor de  $t=0$ .

En el sentido de que al tomar  $\varepsilon \rightarrow 0$ , perdemos información del sistema (se tienen dos constantes de integración, y se requiere sólo una cuando  $\varepsilon=0$ ), ya que se pierde la derivada más alta,  $\varepsilon \frac{d^2 \phi}{dt^2}$  se le llama a este límite un límite singular.

La ~~presencia~~ presencia de un tiempo muy pequeño y un estado "transitorio" en dicho intervalo, define una capa límite (como en el caso de flujos con "viscosidad pequeña").

A éstos se le llama Theoría de perturbaciones singulares (Jordan-Smith, 1987).

Al final del semestre estudiaremos lo que es la teoría de perturbación,

y ~~esto~~ esto pertenece a un tema más amplio, el cual es Análisis Asintótico, lo cual estudiaremos el siguiente semestre. (Otoño 2010).

## Imperfect Bifurcations and Catastrophes.

Simetrías  $\longrightarrow$  Bifurcación de tenedor.

¿Qué pasa si <sup>NO</sup> hay simetrías? Consideremos el sistema:

$$\dot{x} = h + r x - x^3.$$

Si  $h=0$ , entonces tenemos una bifurcación de tenedor

supercrítica

Aquí, tenemos dos parámetros por mover, lo cual hace la situación un poco más difícil que antes.

Consideremos <sup>primer</sup> el caso cuando:

\*  $r = \text{fijo}$ ,  $h = \text{variable}$ .

Tenemos que buscar y analizar los puntos críticos:  $\dot{x} = 0$ ,

i.e.:

$$h + r x_e - x_e^3 = 0.$$

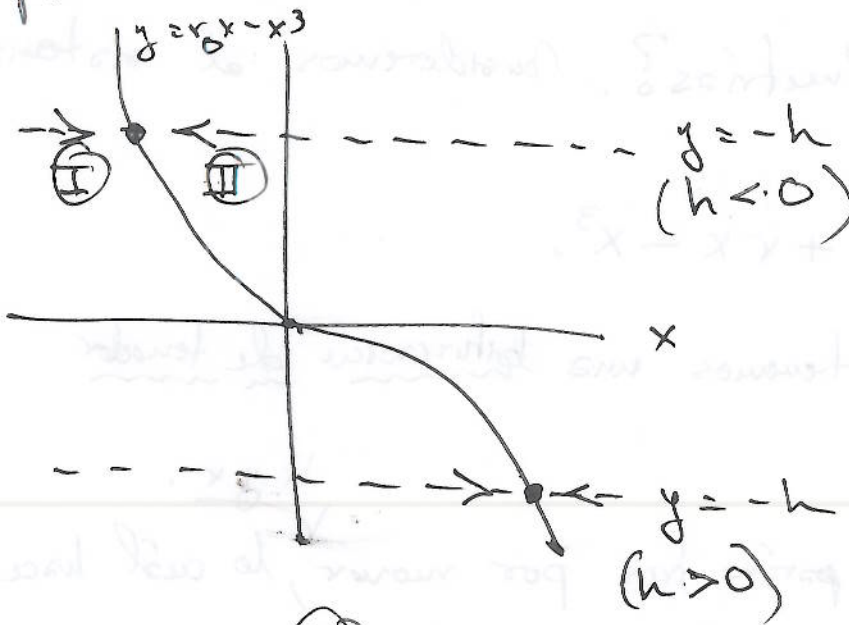
Consideremos las funciones:

$$y = r x_e - x_e^3$$

$$y_2 = -h$$

Sus intersecciones de estas curvas definen los puntos críticos.

Case (2)  $r = r_0 \leq 0$ . Aquí,  $y = r_0 x - x^3$  es decreciente, y solamente hay un punto fijo para cualquier valor de  $h$ ; para  $h$  variable:



Notamos que el punto fijo es estable:

En la región **I**:

$$r_0 x - x^3 > -h$$

ie.

$$r_0 x - x^3 + h > 0$$

ie  $\dot{x} > 0$

En la región **II**:

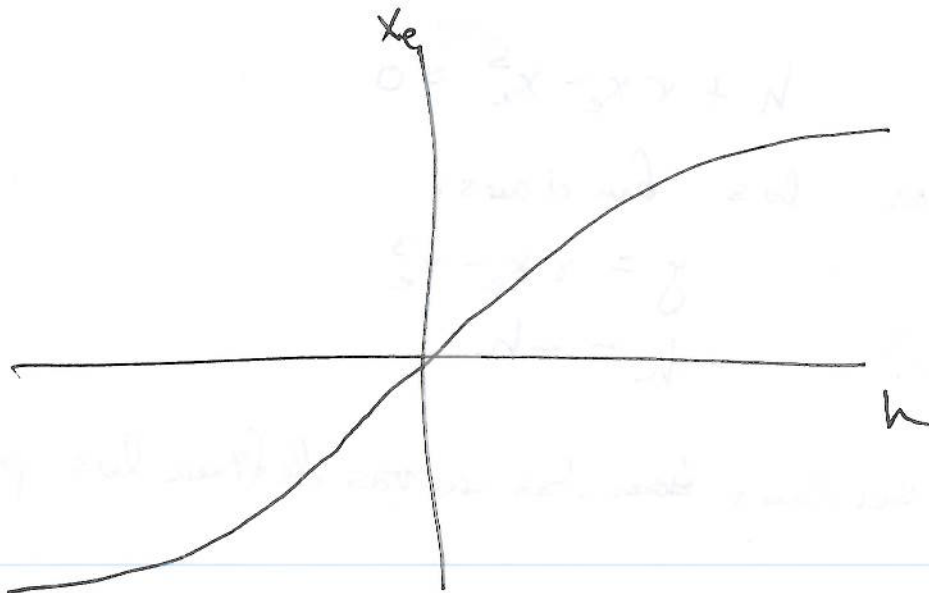
$$r_0 x - x^3 < -h$$

$$r_0 x - x^3 + h < 0$$

$$\dot{x} < 0.$$

Entonces el punto fijo es estable, para todo valor de  $h$ .

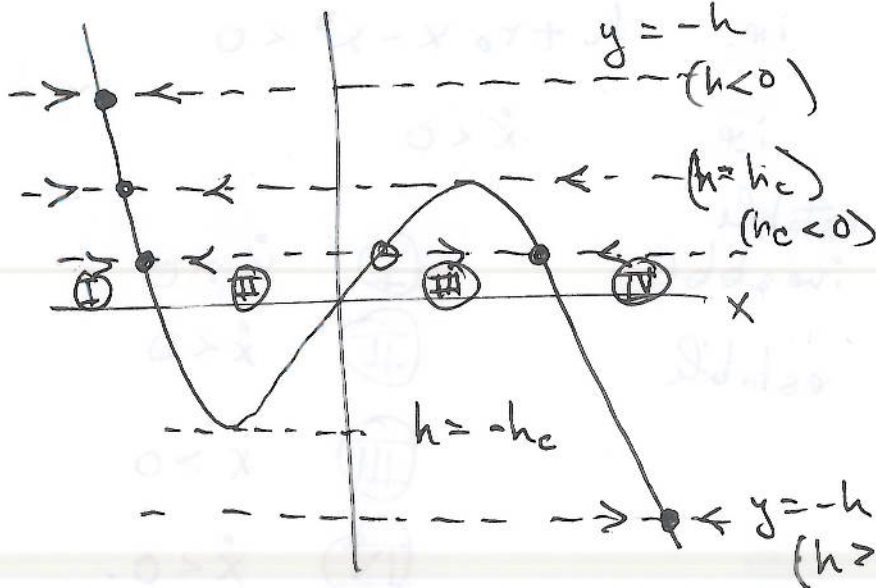
El diagrama de bifurcación es como sigue:





Caso (b)  $r = r_0 > 0$ .

Este caso es más interesante, pues al variar  $h$ , hay un punto en el cual pasamos de tener uno (a dos y) a tres, pero nuevamente tener (dos y) un punto fijo.



Aquí,  $y = r_0 x - x^3$  tiene tres ceros.

Notemos que hay un punto crítico, o bien, hay un valor crítico de  $h$ ,  $h = h_c$ , tal que

pasamos de un punto crítico a tres:  $h_c(r_0) = \frac{2r_0}{3} \sqrt{\frac{r_0}{3}}$   
(en unos momentos calculamos  $h_c = h_c(r_0)$ ).

Si  $h < -h_c$ , entonces tenemos un punto fijo, el cual es estable (cálculo como en pag = 70 =).

Si  $h = -h_c$ , entonces tenemos dos puntos fijos, uno estable y el otro es un punto fijo estable-inestable, (ie. punto fijo híbrido).

Si  $h > -h_c$ , entonces tenemos tres puntos fijos.  
(de hecho,  $-h_c < h < h_c$ ).

$$x_e = a, x_e = b, x_e = c.$$

En los regiones  $\textcircled{I}$  y  $\textcircled{II}$ , es como en la pag. =70=.

En los regiones  $\textcircled{III}$  y  $\textcircled{IV}$ , es como sigue:

En  $\textcircled{III}$ :

$$r_0 x - x^3 > -h$$

i.e.

$$h + r_0 x - x^3 > 0$$

i.e.

$$\dot{x} > 0$$

Entonces:  $\begin{cases} x_e = a \text{ es estable} \\ x_e = b \text{ es inestable,} \\ x_e = c \text{ es estable} \end{cases}$

En  $\textcircled{IV}$ :

$$r_0 x - x^3 < -h$$

$$\text{i.e. } h + r_0 x - x^3 < 0$$

i.e.

$$\dot{x} < 0$$

$$\textcircled{I} \quad \dot{x} > 0$$

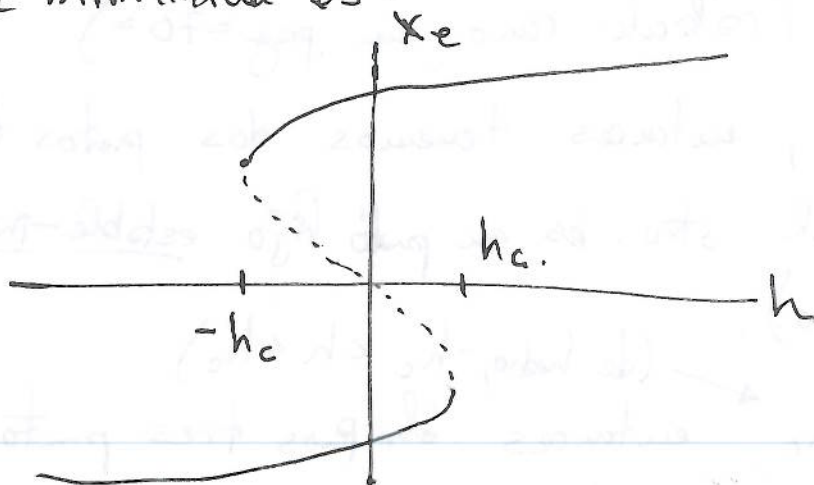
$$\textcircled{II} \quad \dot{x} < 0$$

$$\textcircled{III} \quad \dot{x} > 0$$

$$\textcircled{IV} \quad \dot{x} < 0.$$

En  $h = +h_c$ , tenemos nuevamente una bifurcación, tal que para  $h > +h_c$  tenemos nuevamente un punto fijo, el cual es estable (ver cálculo similar en pag =70=).

El diagrama de bifurcación es:



Notemos que en  $h = -h_c$  y  $h = +h_c$  tenemos bifurcaciones del tipo silla-nudo.

Calculamos ahora el valor de  $h_c$ . Recordemos que  $r_0 > 0$ , es fijo. Notemos que cuando  $y = -h_c$  y  $y = r_0 x_e - x_e^3$  tienen dos intersecciones, entonces son tangentes en el punto de bifurcación silla-nudo.

Entonces:

$$r_0 x_e - x_e^3 = -h_c$$

$$\left. \frac{d}{dx} (r_0 x - x^3) \right|_{x=x_e} = 0$$

$$\text{i.e. } \left. x r_0 - 3x^2 \right|_{x=x_e} = 0$$

I.e., tenemos que resolver <sup>para  $h_c$ .</sup> el sistema de ecuaciones: para

$$r_0 x_e - x_e^3 = -h_c \quad (*)$$

$$r_0 - 3x_e^2 = 0. \quad (**)$$

$$\text{Ec. (**)} \Rightarrow x_e = -\sqrt{\frac{r_0}{3}}, \left( \text{que es donde } r_0 x_e - x_e^3 \text{ tiene un mínimo} \right).$$

$$\text{Ahora, ec. (*): } (r_0 - x_e^2) x_e = -h_c.$$

$$\Rightarrow \left( r_0 - \frac{r_0}{3} \right) \left( -\sqrt{\frac{r_0}{3}} \right) = -h_c \Rightarrow \boxed{h_c = \frac{2}{3} r_0 \sqrt{\frac{r_0}{3}}}$$



Entonces,

$h = \pm h_c(r_0)$  son puntos de bifurcación silla-nudo.

Dichas curvas se les llama curvas de bifurcación:

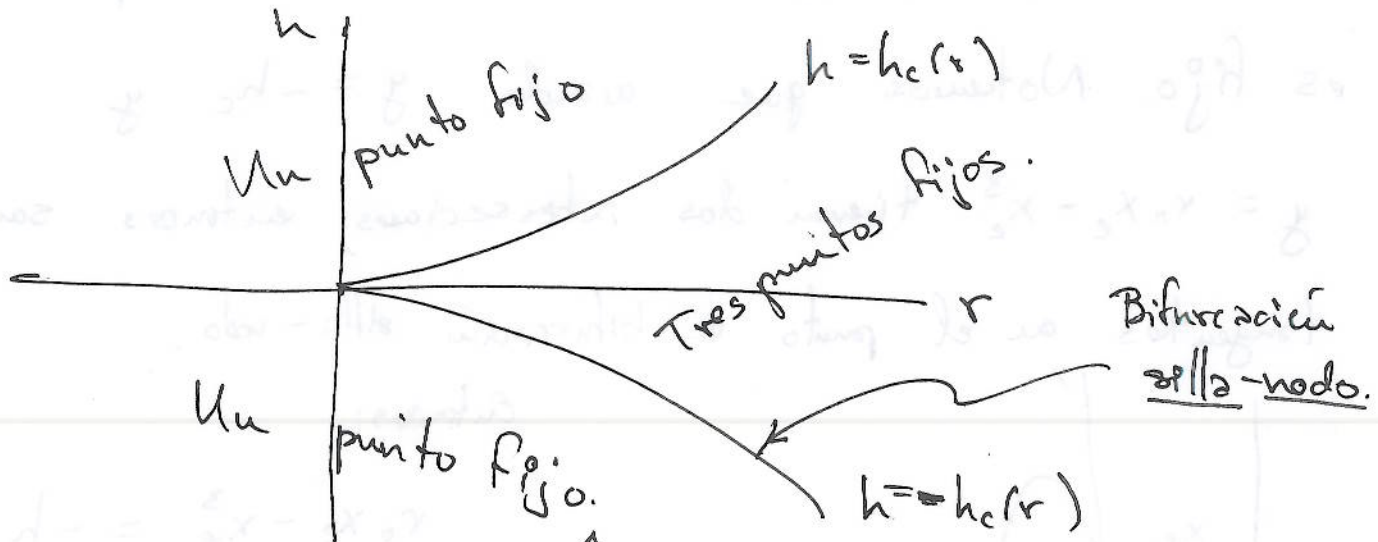
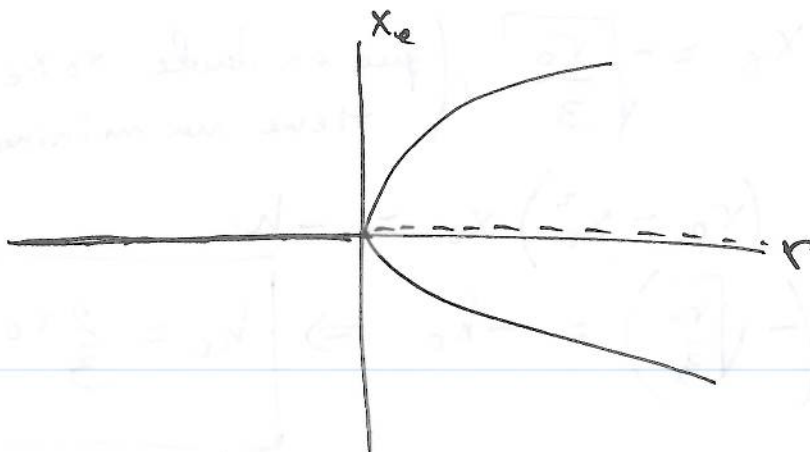


Diagrama de bifurcación, Serán muy socorridos en los sistemas de dos dimensiones.

\*  $r = \text{variable}$ ,  $h = \text{fijo} \equiv h_0$

(a) Consideremos el caso  $h_0 = 0$ . Este caso se reduce al caso de bifurcación de tener:

$$\dot{x} = rx - x^3$$



Caso (b)  $h > h_0 > 0$ .

07/17/01/2010

El sistema es:

$$\dot{x} = h_0 + rx - x^3.$$

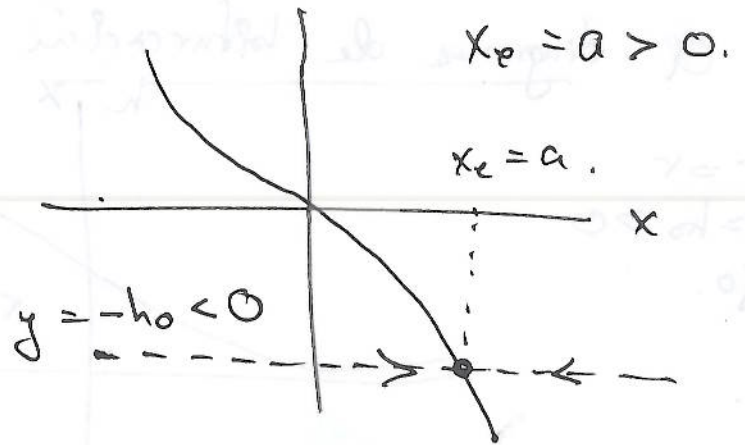
Nuevamente, buscaremos las intersecciones de:

$$y = -h_0 \quad (-h_0 < 0),$$

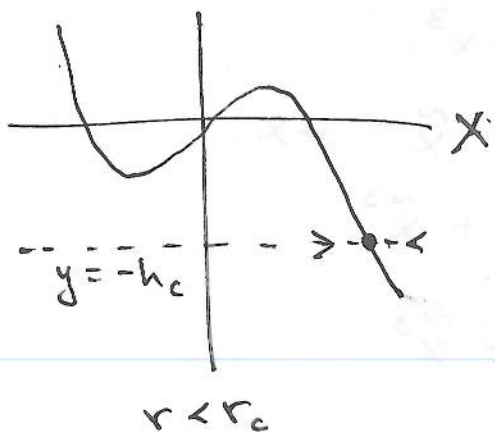
$$y = rx - x^3.$$

Para  $r < 0$ , tenemos una sola intersección,

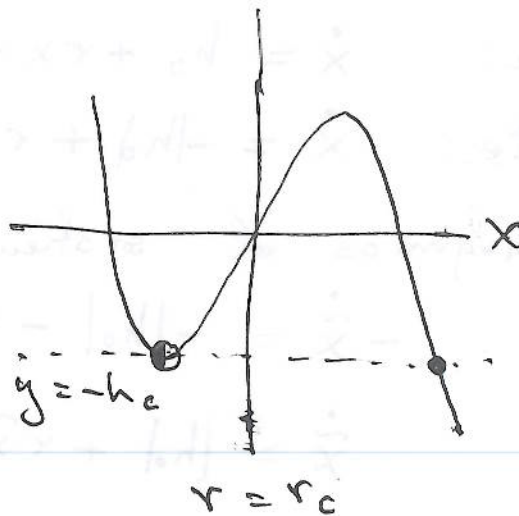
ie. un solo punto crítico, el cual es estable (pag 70).



Conforme variamos  $r$  de valores negativos a positivos, tenemos ahora 3 raíces de  $y = rx - x^3$ , y alcanzamos un valor de  $r$ ,  $r_c = 3 \left( \frac{h_0}{2} \right)^{2/3}$  (ver página 73), en el cual hay una transición, ie., es un punto de bifurcación del tipo silla-nodo.



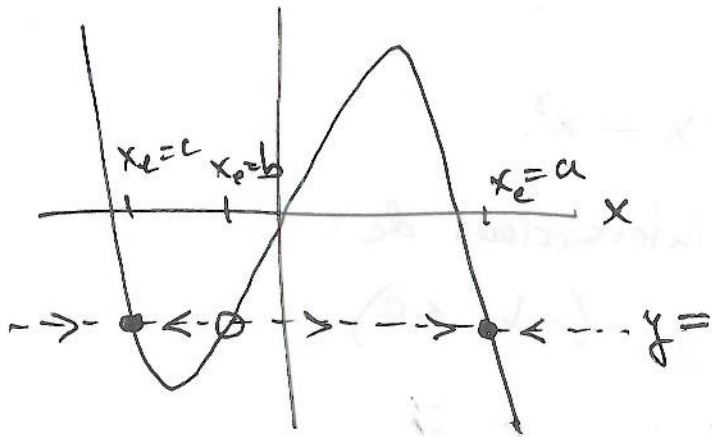
$r < r_c$



$r = r_c$

Para  $r = r_c$ , dos puntos fijos: uno no estable y el otro semi-estable.

Para  $r > r_c$ :



Tenemos ahora 3 puntos críticos

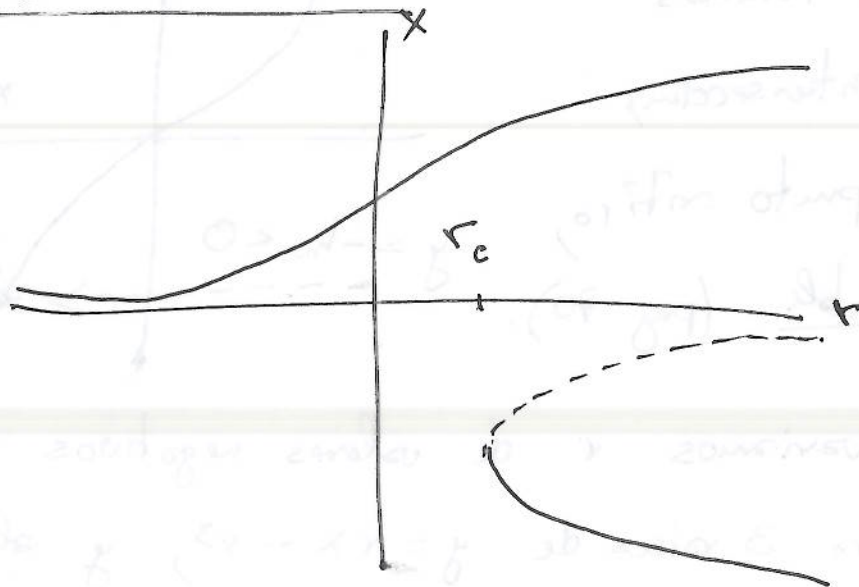
$x_e = a$ , estable

$x_e = b$ , inestable

$x_e = c$ , estable

El diagrama de bifurcación se ve entonces como:

$h = h_0 > 0$   
fijo.



Caso (c)  $h = h_0 < 0$ . ¿Cómo se ve el diagrama de bifurcación si  $h_0 < 0$ ?

Tenemos que:  $\dot{x} = h_0 + rx - x^3$

i.e.:  $\dot{x} = -|h_0| + rx - x^3$

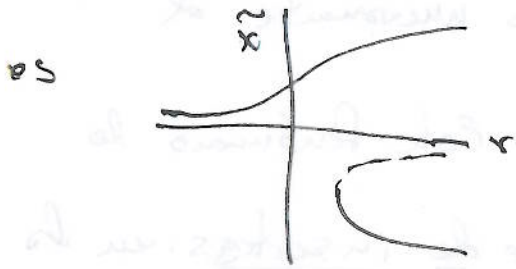
Ahora bien, hagamos el cambio:  $\tilde{x} = -x$ :

$$-\dot{\tilde{x}} = -|h_0| - r\tilde{x} + \tilde{x}^3$$

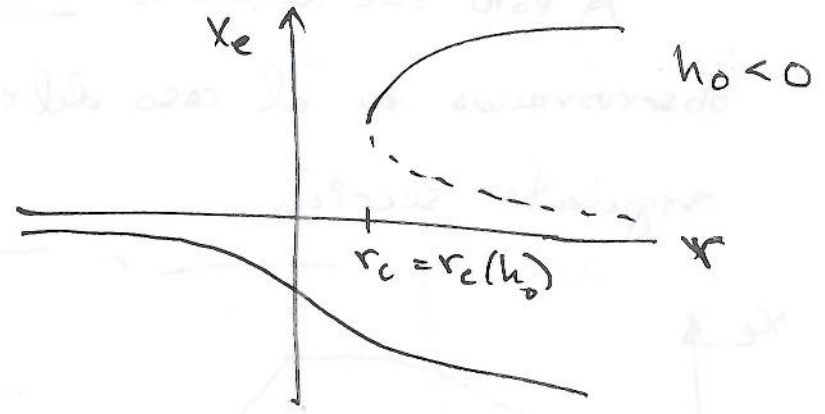
$$\dot{\tilde{x}} = |h_0| + r\tilde{x} - \tilde{x}^3$$



Este sistema es similar al sistema considerado anteriormente, cuyo diagrama de bifurcación es



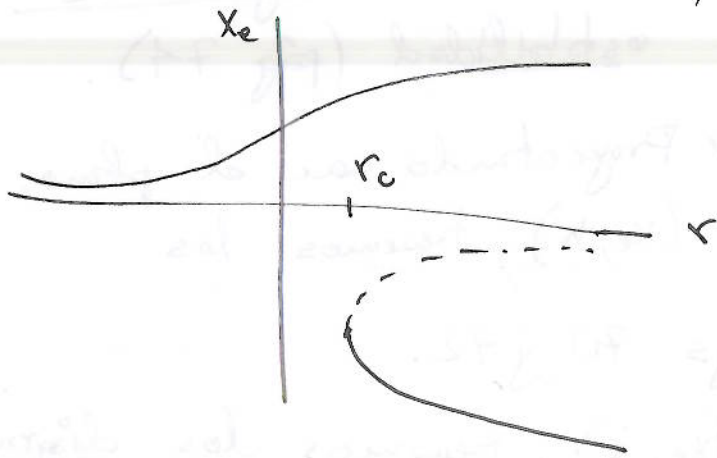
Entonces, como  $x = -x^2$ :



Para el caso  $h_0 < 0$ , tenemos que el diagrama de bifurcación es simétrico respecto al eje  $r$ .

Consideremos el caso  $h_0 > 0$ .

El diagrama de bifurcación, como vimos, es:

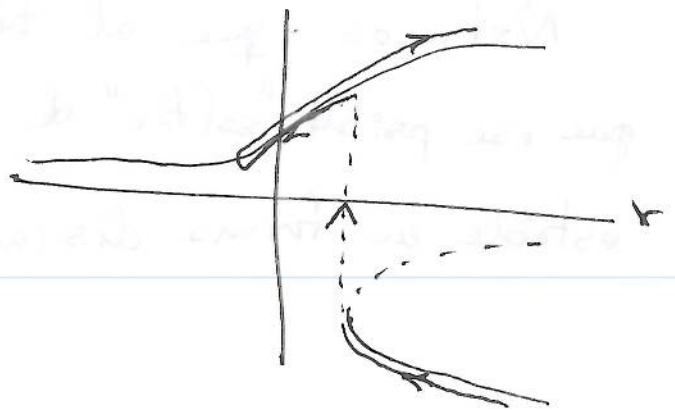


Si  $r < r_0$ , tenemos un solo punto ~~crítico~~ de equilibrio. Si variamos  $r$ , inclusive para  $r > r_0$ , la rama estable anterior es

inaccesible, a menos que se perturbe mucho el

punto de equilibrio superior.

Nótese que existe un fenómeno de histéresis conforme se varía el parámetro  $r$ . La flecha indica cómo variamos  $r$ .



Notamos de la figura anterior no regresamos a la rama inferior, aún cuando incrementamos nuevamente el valor de  $r$ .

A esto se le llama histéresis. Este fenómeno lo observamos en el caso de brote de insectos en la siguiente sección.



Podemos ver los puntos críticos, como función de los parámetros  $(h, r)$ .

\* Proyectando en el plano  $(h, r)$ , tenemos el diagrama de estabilidad (pág 74).

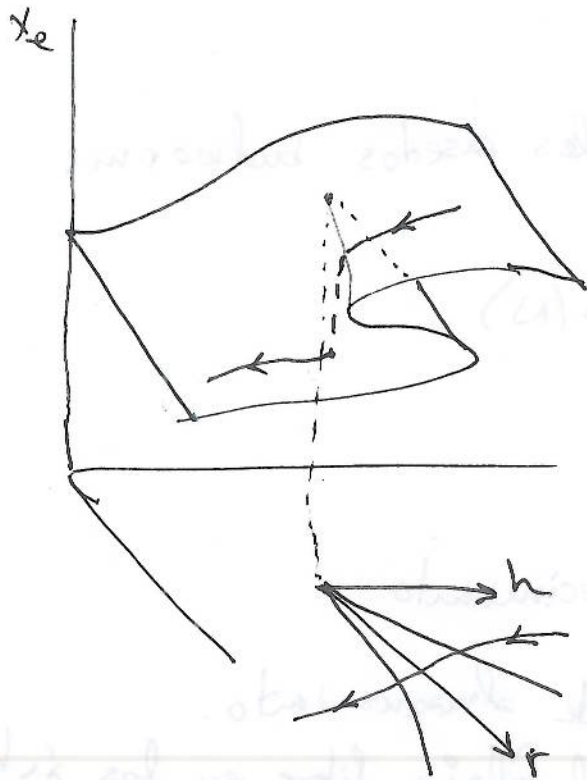
\* Proyectando en el plano  $(x_e, h)$ , tenemos los

diagramas de bifurcación en pags 70 y 72.

\* Proyectando en el plano  $(x_e, r)$ , tenemos los diagramas de bifurcación mostrados en las páginas 74, 76 y 77.

Notamos que el término catástrofe se debe a que es posible "saltar" de una rama estable a otra rama estable en forma discontinua:

07/70/2010.



Es este salto el que puede causar efectos de histéresis.

03/20/2010

### Brote de insectos.

Insectos: Spruce budworm.

Estos Insectos atacan el follaje de los bosques en Canadá, causando plagas; pueden destruir bosques en 4 años, aproximadamente.

Modelo: Interacción entre la plaga y los árboles del bosque.

Dos escalas de tiempo: • Evolución de los insectos: escala rápida: (5 veces su población en 1 año)

- Evolución de follaje, crecimiento y muerte de los árboles.

- \* 7-10 años: reemplazar el follaje

- \* 100-150 años: vida sin insectos



# Modelo

$N(t)$  - población de los insectos budworm.

$$\frac{dN}{dt} = RN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - p(N)$$

Logística

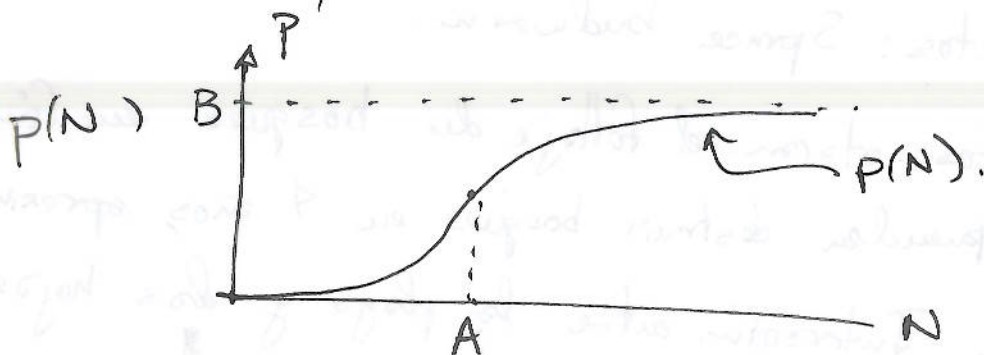
taza

$R$  - (razón) de crecimiento

$K$  - capacidad de almacenamiento.

(depende del folioje libre en los árboles)

$p(N)$  - depredación; debida principalmente a los pájaros



Después de  $N=A$ , la predación crece rápidamente, y se satura, y los pájaros no comen más que un límite de insectos.

Si  $N$  es pequeño ( $N < A$ ), entonces la depredación es baja, y los pájaros buscan otro tipo de alimento.

Propuesta para  $p(N)$ : 
$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2}$$

$A, B > 0$ .