

Notemos que $f(x_c) = 0$, por ser x_c punto fijo:

$$\dot{\eta} = \eta f'(x_c) + \frac{\eta^2}{2} f''(x_c) + O(\eta^3)$$

Finalmente, si los términos η^2 , η^3 son despreciables terminamos con la linealización del sistema alrededor de x_c :

$$\dot{\eta} = f'(x_c) \eta,$$

siempre y cuando $f'(x_c) \neq 0$. ← **IMPORTANTE.**

También es importante decir alrededor de cuál punto fijo se linealiza.

Notemos que si:

$$* f'(x_c) < 0 \Rightarrow \eta \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

y x_c es un punto de equilibrio estable.

$$* f'(x_c) > 0 \Rightarrow \eta \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$$

y x_c es un punto de equilibrio inestable.

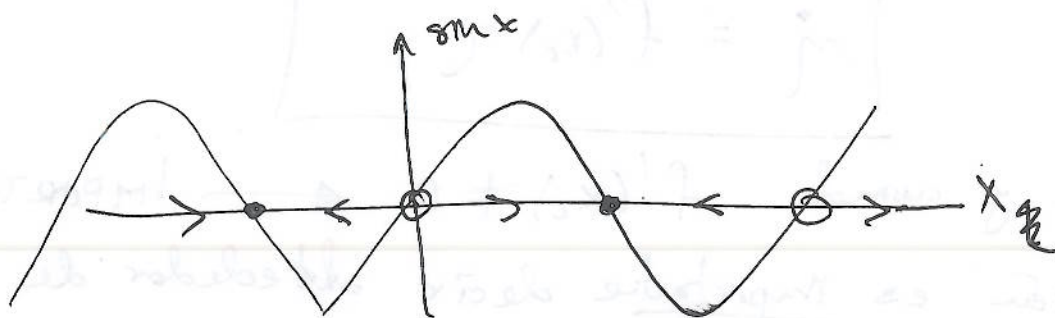
Magnitud de $|f'(x^*)|$: que tan estable/inestable es el sistema

$\frac{1}{|f'(x^*)|} \rightarrow$ Tiempo característico.

Ejemplo 1 Determine la estabilidad lineal de los pts fijos del sist: $\dot{x} = \sin x$:

~~$f(x)$~~ $x_c = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi.$

$$f'(x_c) = \cos x_c = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es par. } \underline{\text{Inestable}} \\ -1, & \text{si } n \text{ es impar. } \underline{\text{Estable}} \end{cases}$$

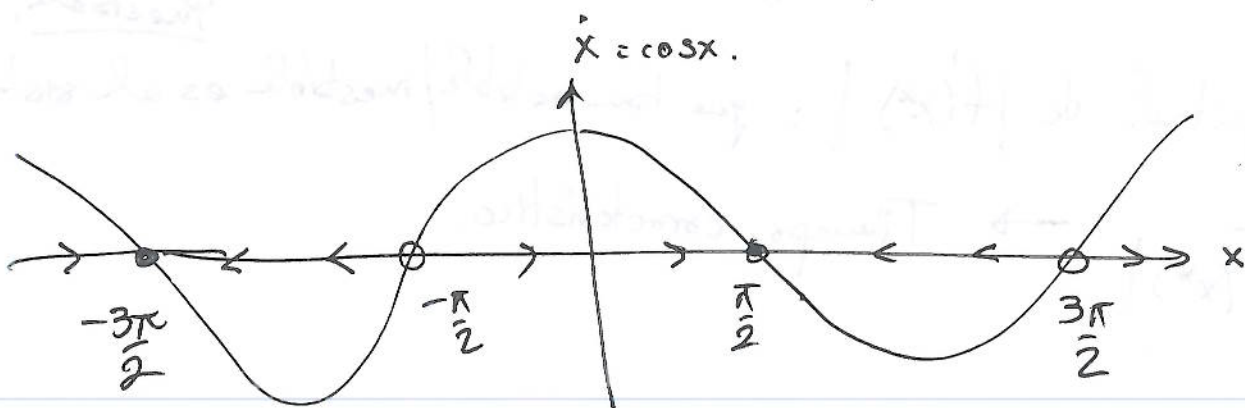


Ejemplo: $\dot{x} = \cos x$.

Estudie la estabilidad lineal de sus puntos fijos:

Puntos fijos: $x_c = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$$f'(x_c) = -\sin x_c = \begin{cases} -1, & n \text{ es par. } \underline{\text{Estable}} \\ 1, & n \text{ es impar. } \underline{\text{Inestable}} \end{cases}$$



Ejemplo 2. Busquemos los puntos fijos de la ~~eq~~ ^{eq} logística, por medio de estabilidad lineal.

$$\dot{N} = f(N) = r_0 N \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

$$f(N) = 0 \Rightarrow N_e = 0 \text{ ó } N_e = K$$

$$f'(N) = \frac{d}{dN} \left(r_0 N - \frac{r_0 N^2}{K} \right)$$

$$= r_0 - \frac{2r_0}{K} N$$

* $N_e = 0$: $f'(0) = r_0 > 0 \Rightarrow N_e = 0$ es inestable

* $N_e = K$: $f'(K) = r_0 - \frac{2r_0 K}{K} = -r_0 < 0 \Rightarrow N_e = K$ es estable.

Tiempo característico $t_c = \left| \frac{1}{f'(N_e)} \right| = \frac{1}{r_0}$

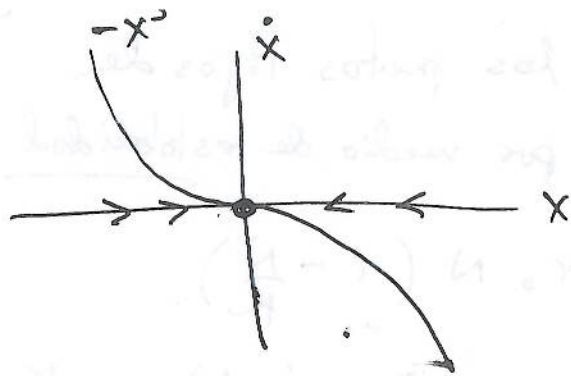
Ejemplo 3: ¿Qué podemos decir de la estabilidad si $f'(x_c) = 0$?

Nada se puede decir, y depende del problema en particular.

(a) $\dot{x} = -x^3$. Punto fijo $x_c = 0$.

$$f'(x) = -3x^2 \Rightarrow f'(x_c) = 0$$

Pero

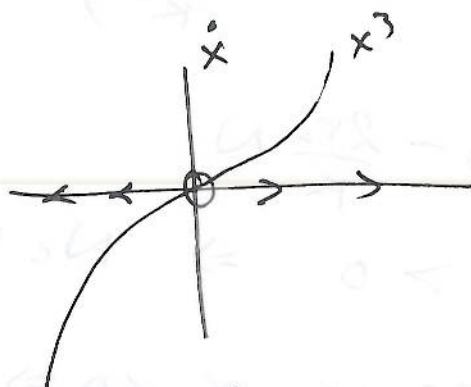


$x_c = 0$ es un punto de equilibrio estable.

(b) $\dot{x} = x^3$. Punto fijo $x_c = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x_c) = 0.$$

Pero

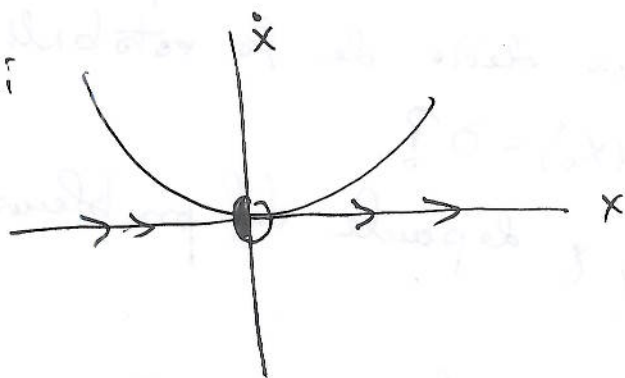


$x_c = 0$ es inestable.

(c) $\dot{x} = x^2$. Punto fijo $x_c = 0$.

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(x_c) = 0.$$

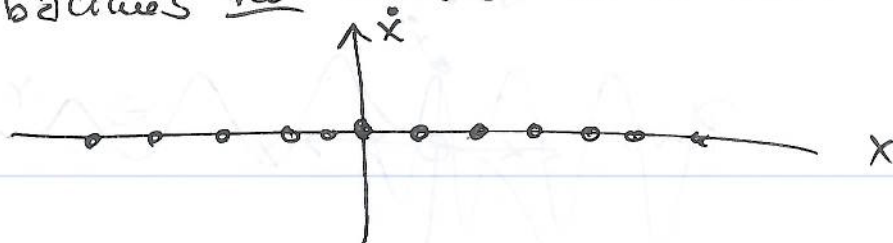
Aquí



$x_c = 0$ es un punto fijo híbrido, mitad estable y mitad inestable.

(d) $\dot{x} = 0$. Toda la línea real son puntos fijos.

Perturbaciones no decaen ni crecen.



2.5 Existence and Uniqueness. (Ecuaciones Diferenciales I)

Theorem: Consideremos el

Problema de Valores Iniciales
(PVI)

$$\dot{x} = f(x, t)$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Si $f(x, t)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ son continuas en una vecindad de (x_0, t_0) :

$$\alpha < t < \beta$$

$$\gamma < x < \delta$$

ie. $t_0 \in (\alpha, \beta)$ y $x_0 \in (\gamma, \delta)$.

Entonces, en algún intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$

contenido en $\alpha < t < \beta$, hay una solución (existencia)

$$y = x = \phi(t)$$

del problema de valores iniciales, y la

solución es única (unicidad)

Ejemplo 1: PVI

$$\dot{x} = x^{1/3}$$

$$x(0) = 0.$$

Las soluciones no son únicas:

• $x_1(t) \equiv 0$ is a solution

• $\int \frac{\dot{x}}{x^{1/3}} dt = \int 1 dt, \Rightarrow \int \frac{d}{dt} \left(\frac{x^{2/3}}{2/3} \right) dt = \int dt$

$$\Rightarrow x^{2/3} = \frac{2}{3}t + C.$$

= 25 =

Para satisfacer las condiciones iniciales:

$$0 = \frac{2}{3} \cdot 0 + C \Rightarrow C = 0.$$

$\Rightarrow x_2(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{2/3}$ también es solución.

Finalmente:

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} x_1(t), & 0 \leq t \leq \alpha \\ x_2(t), & \alpha \leq t. \end{cases}$$

is also solución:

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \alpha \\ \left(\frac{2}{3}t\right)^{2/3}, & \alpha \leq t. \end{cases}$$

i.e., tenemos un número infinito de soluciones.

Notemos que; aquí $f(t, x) = x^{1/3}$ es continua en $(x_0, t_0) = (0, 0)$ pero $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ es discontinuo en $(x_0, t_0) = (0, 0)$.

El teorema no aplica.

Importante: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Aquí: } \dot{x} = f(x) \Rightarrow \text{pts. fijas son } f(x) = 0 \\ \Rightarrow x_e = 0. \text{ Pero, al } \underline{\text{linealizar}}: \\ f'(x_e) = f'(0) \text{ es infinito, i.e., el pto. fijo} \\ \text{es } \underline{\text{muy}} \text{ inestable.} \end{array} \right.$

Ejemplo 2 I.V.P.

$$\dot{x} = 1 + x^2$$

0727122009.

$$x(0) = 0.$$

¿Tiene Solución? ¿Es única?

Aquí $f(x) = 1 + x^2$ y $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ son continuos en $(x_0, t_0) = (0, 0)$. Entonces, existe una única solución alrededor de $(0, 0)$.

Ahora bien.

$$\frac{\dot{x}}{1+x^2} = 1$$

$$\frac{d}{dt} (\text{Arctan } x) = 1$$

$$\Rightarrow \text{Arctan } x = t + C.$$

$$x(t) = \tan(t + C).$$

$$\text{Si } x(0) = 0 \Rightarrow \text{Arctan } 0 = 0 + C \Rightarrow \boxed{C=0}$$

Entonces

$$\boxed{x(t) = \tan(t)}$$

Notemos que tiene una discontinuidad infinita en $x = \frac{\pi}{2}$. No contradice el Teorema de Existencia y unicidad, dado que la solución existe en una vecindad de $(0, 0)$.

discontinuidad infinita \equiv blow-up.

Impossibility of Oscillations...

Solamente dos cosas pueden suceder en sistemas de 1er orden:

1) Soluciones \rightarrow punto fijo

2) Soluciones \rightarrow infinito.

De hecho una tercera:

3) Soluciones se quedan ahí (pts. fijos).

Razón: Las trayectorias son forzadas a crecer, o decrecer monótonicamente, o bien son constantes.

Entonces, un punto fijo (solución de equilibrio) es considerada como asintóticamente y monótonamente. Por tanto, no

hay soluciones periódicas.

Revisar el Análogo mecánico: Sistemas sobre-amortiguados

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = F(x) \quad \text{donde } |b\dot{x}| \gg |m\ddot{x}|.$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = f(x) = \frac{F(x)}{b} \Rightarrow \text{no hay } \underline{\text{oscilaciones}}.$$

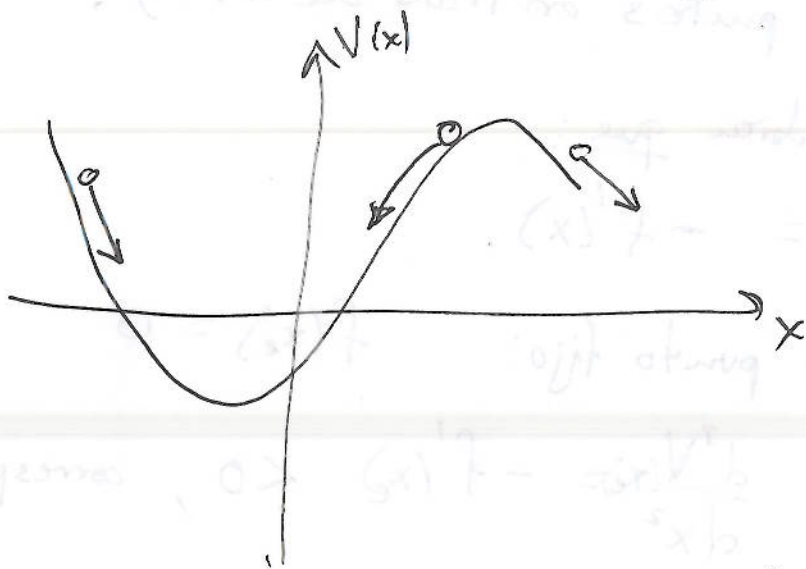
Potenciales

Supongamos que existe una función $V(x)$ tal que,

$$f(x) = - \frac{dV}{dx}$$

Se le llama $V(x)$, potencial de la fuerza $f(x)$,

Suponemos aquí que la fuerza ($m\ddot{x}$) es despreciable y el amortiguamiento es muy grande:



Notamos que el signo negativo, "-", quiere decir que la partícula "cae". Veamos por qué. Debemos mostrar que

$$\frac{dV}{dt} < 0,$$

es decir, que V decrece como función del tiempo.

$$\begin{aligned} \text{Ahora: } \frac{dV(x(t))}{dt} &= \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = -f(x) \dot{x} = \\ &= -f(x)f(x) = -f(x)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

como queríamos probar.

Esto muestra que no hay oscilaciones imparo.
pueden existir.

* Notemos que en máximos o mínimos de

$$V(x): \quad \frac{dV}{dx} = 0, \Rightarrow \dot{x} = 0.$$

Es decir, los puntos fijos del sistema se alcanzan en los puntos críticos de $V(x)$.

* Notemos también que:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -f'(x).$$

Si x_e es punto fijo: $f(x_e) = 0$

★ y si $\frac{d^2V(x_e)}{dx^2} = -f'(x_e) < 0$, corresponde

a un máx. local de $V(x)$, pues:
y a que x_e es inestable ($f'(x_e) > 0$)

★ Si x_e es pto fijo tal que:

$$\frac{d^2V(x_e)}{dx^2} = -f'(x_e) > 0,$$

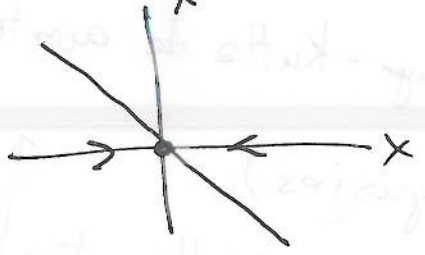
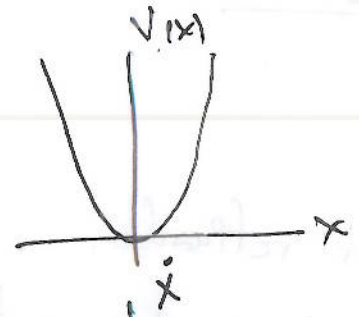
$\Rightarrow V(x_e)$ es un mínimo local, dado que:
y x_e es estable ($f'(x_e) < 0$)

Ejemplo 1: Dibuje el potencial de $\dot{x} = -x$

y clasifique los puntos fijos:

$$-x = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow V(x) = \frac{x^2}{2} + C.$$

Se escoge $C=0$, pues es solo un constante hacia arriba. El único punto fijo es:



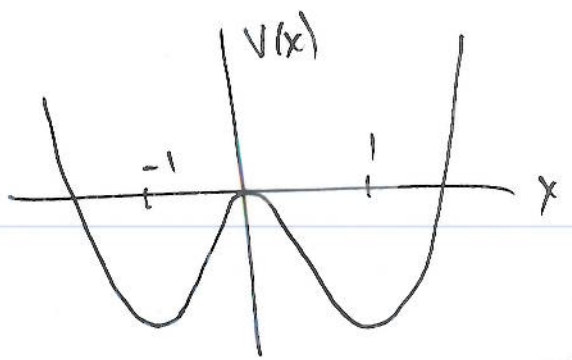
$x_e = 0$
y es un punto de equilibrio estable..

Ejemplo 2 Grafique el potencial del sistema:

$$\dot{x} = x - x^3 \text{ y clasifique sus puntos fijos:}$$

$$\text{Dado que } x - x^3 = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow x^3 - x = \frac{dV}{dx}.$$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C = V(x). \text{ Escogemos: } C=0;$$



$V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$
Puntos fijos: $x_e = 0$
 $x_e = +1$
 $x_e = -1$

Notamos que

$x_e = 0$ es un punto de equilibrio inestable

y que $x_e = -1$, $x_e = +1$ son puntos fijos de equilibrio inestable.

ANÁLISIS NUMÉRICO.

Resolver ecuaciones en los computadores.

* El método de Euler

* Refinamientos

- El método de Euler refinado.

- El método de Runge-Kutta de cuarto orden.

* Fortran, C, Pascal (Lenguajes)

Paquetes: Matlab, Maple, Mathematica

} para resolver ecuaciones.

Phasex → IBM-PC

MacMath → Macintosh.

CAPITULO 3. BIFURCACIONES.

0229122009.

La dinámica en sistemas de 1-dimensión es

- 1) ~~las~~ las soluciones tienden a puntos fijos,
- 2) las soluciones tienden a $\pm \infty$.

Y no hay más.

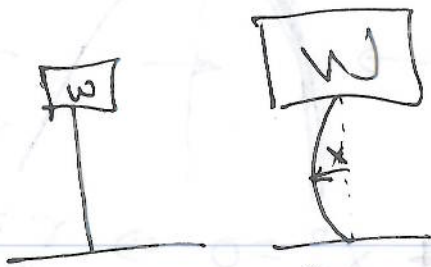
¿Qué pasa si la ecuación depende de un parámetro? Puede suceder que puntos fijos sean creados o destruidos, o bien que cambie su estabilidad.

Cuando cambios cualitativos suceden en la dinámica del sistema se les llaman bifurcaciones.

A los valores del parámetro r cuando sucede un cambio cualitativo, o bifurcación, se les llaman puntos de bifurcación.

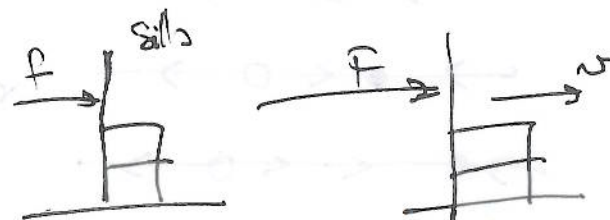
Ejemplos:

* Varilla que se dobla por cambiar el peso.



w es el parámetro.

* Fuerzas estáticas sobre un objeto.



f es el parámetro.
Se necesita una fuerza crítica, para hacer mover al objeto.

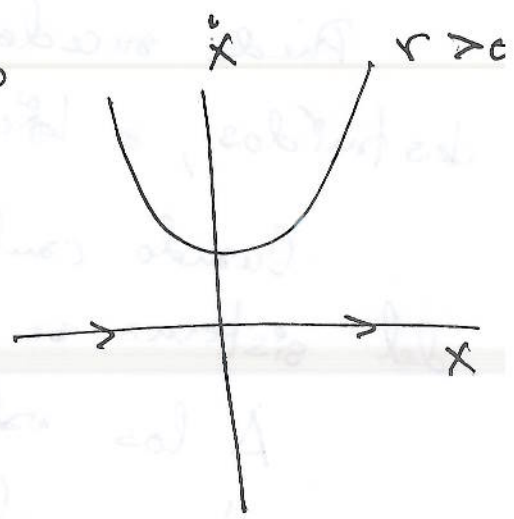
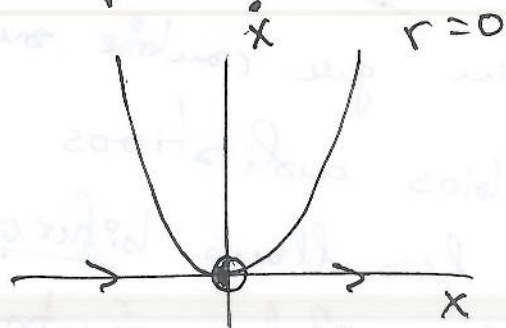
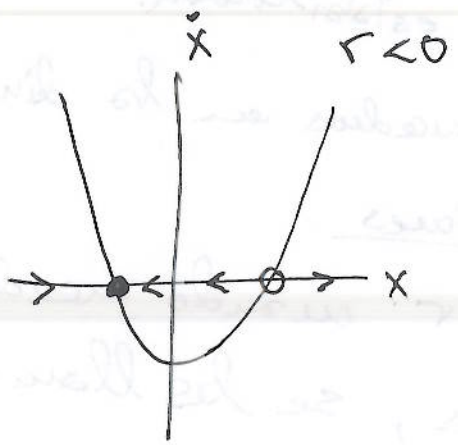
3.1 Bifurcaciones del tipo Sella - Nodo.

Este tipo de bifurcaciones es cuando puntos fijos son creados o destruidos. Se aproximan, chocan y se destruyen.

Ejemplo: $\dot{x} = r + x^2$

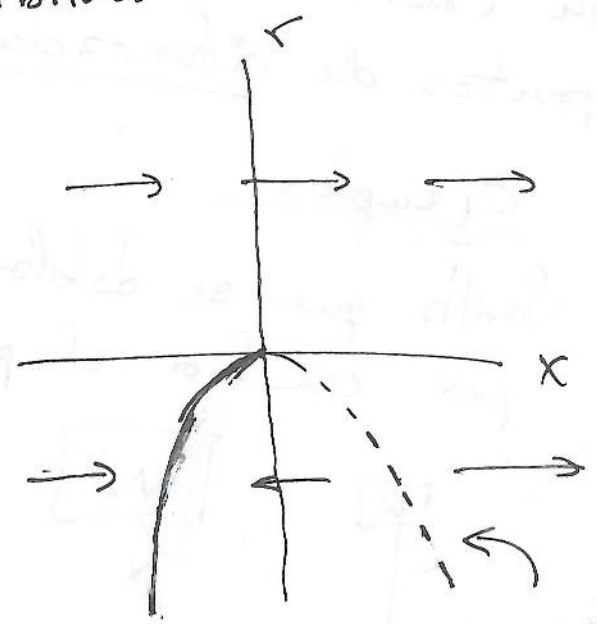
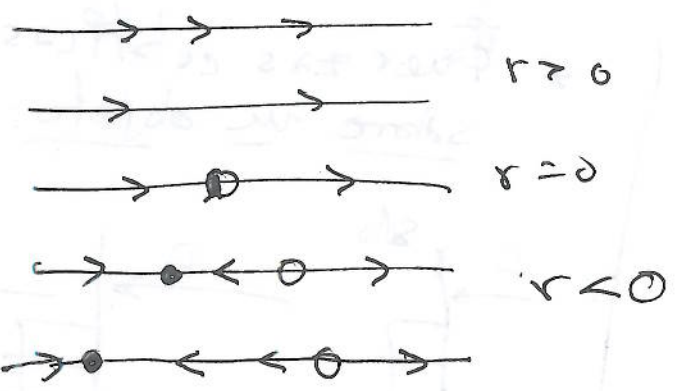
donde r es un parámetro real. Aquí:

$$f_r(x) = r + x^2$$



Semi-estable
estable - inestable
Punto fijo híbrido.

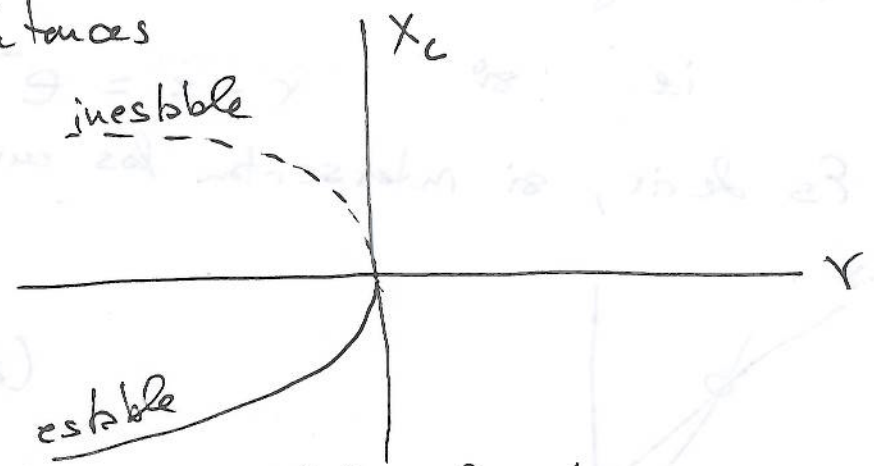
Lineas fijas:



$$f(x_c) = 0 \Rightarrow r + x_c^2 = 0 \Rightarrow r = -x_c^2$$

Es costumbre pensar en "r" como la variable "dependiente" y en "x_c" como la variable "independiente". Entonces

Diagrama de bifurcación



saddle-node = estable
= turning-point bifurcation = fold bifurcation...

O bien, bifurcación de "círculo azul": Si $r > 0$ y decrease, del "cielo claro", se generan 2 puntos fijos



Ejemplo 1) Análisis lineal de los puntos fijos de $\dot{x} = r + x^2$. (diferente del texto)

$f(x_c) = 0 \Rightarrow r + x_c^2 = 0 \Rightarrow x_c = \pm \sqrt{-r}$.

Si $r > 0$, no hay puntos fijos (reales).

Si $r \leq 0$: $x_c = \pm \sqrt{|r|}$

Ahora $f(x) = r + x^2 \Rightarrow f'(x_c) = \pm 2\sqrt{|r|}$
 $f'(x) = 2x$ (if $x_c = +\sqrt{|r|} \Rightarrow f'(x_c) > 0$
 $x_c = \text{inestable}$)

Coincide con el análisis geométrico $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x_c = -\sqrt{|r|} \Rightarrow f'(x_c) < 0 \\ \Rightarrow x_c \text{ es estable.} \end{array} \right.$

Ejemplo 2) $\dot{x} = r - x - e^{-x}$.

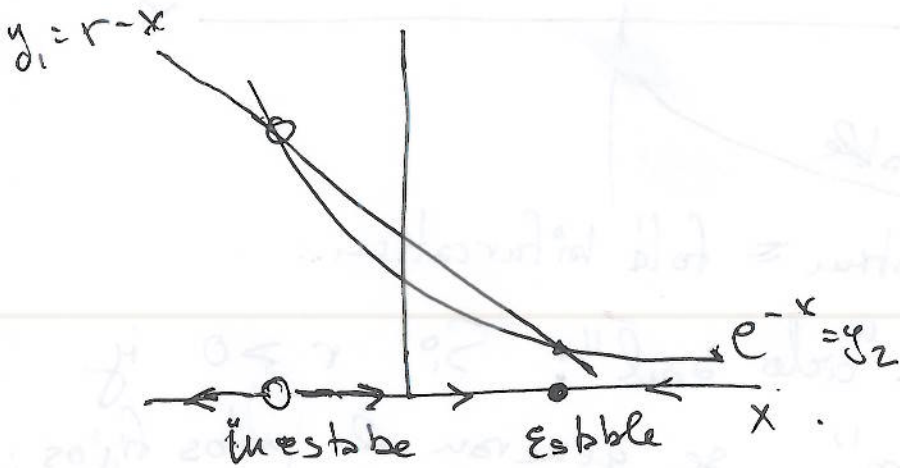
Puntos fijos cuando: $f(x) = r - x - e^{-x} = 0$

i.e. si

$r - x = e^{-x}$ (Nota: Aquí no se puede escribir $x_c = x_c(r)$.)

Es decir, si interseccionan las curvas $y_1 = r - x$

$y_2 = e^{-x}$.



(a) Si $y_1 > y_2$

$r - x - e^{-x} > 0$

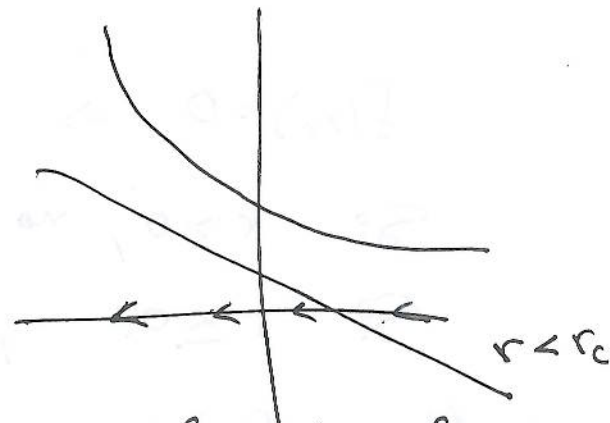
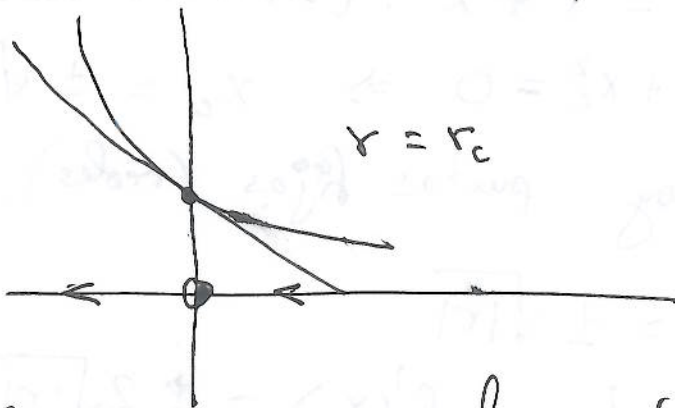
$\Rightarrow \dot{x} = f(x) > 0$

flujo a la derecha

(b) Si $y_1 < y_2 \Rightarrow r - x - e^{-x} < 0 \Rightarrow \dot{x} = f(x) < 0$

\Rightarrow flujo a la izquierda.

Ahora movamos r , de forma que su valor decrezca:



donde r_c es un valor crítico, o el punto de bifurcación.

No tenemos que hubo un cambio en la estructura del flujo, de las líneas fase, i.e., hubo una bifurcación.

Para encontrar el valor del parámetro, i.e., para encontrar el punto de bifurcación r_c , hacemos lo siguiente.

Se deben de satisfacer los siguientes condiciones:

$$y_1 = y_2 \quad (\text{intersección})$$

$$y_1' = y_2' \quad (\text{las curvas son tangenciales})$$

(donde $\varphi' \equiv \frac{d\varphi}{dx}$).

Es decir:

$$\left. \begin{aligned} r-x &= e^{-x} \\ \frac{d}{dx}(r-x) &= \frac{d}{dx}(e^{-x}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} r-x &= e^{-x} \\ -1 &= -e^{-x} \end{aligned}$$

La 2^a eq. $\Rightarrow x_c = 0$

y la 1^a eq $\Rightarrow r - 0 = 1 \Rightarrow \boxed{r_c = 1}$

El punto de bifurcación es $\boxed{r_c = 1}$ y ocurre

en el punto $x = 0$.

Forma normal.

Notamos que $\dot{x} = r - x^2$ son en ~~esta~~ esencia

$\dot{x} = r + x^2$ la misma ecuación,

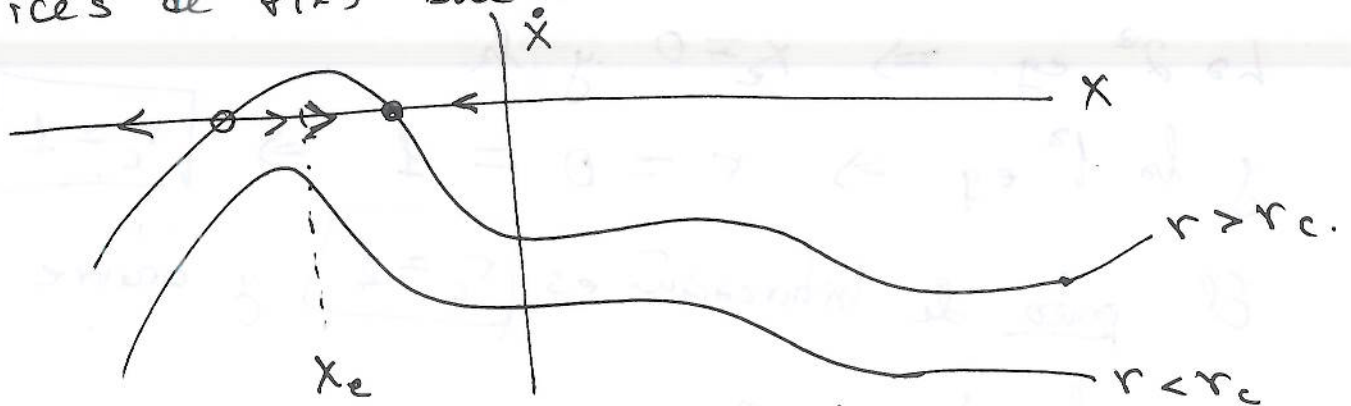
pues ambas presentan una bifurcación silla-nodo.

Notemos que en el ejemplo 2), la bifurcación ocurre en $x_e = 0$ y $r_c = 1$. Entonces, al expandir en Taylor:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r - x - e^{-x} \\ &= r - x - \left[1 - x + \frac{x^2}{2} + \dots \right] \\ &= (r - 1) - \frac{x^2}{2} + \dots\end{aligned}$$

que en esencia es el mismo que en el ejemplo 1).

Bifurcaciones - Silla-Nodo ocurren cuando dos raíces de $f(x)$ son cercanas:



La bifurcación ocurre cerca de (x_e, r_c) .

Supongamos que f es una función de (x, r) , y expandamos en Taylor; alrededor de (x_e, r_c) :

$$\begin{aligned}\dot{x} = f(x, r) &= f(x_e, r_c) + (x - x_e) \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, r_c) + (r - r_c) \frac{\partial f}{\partial r}(x_e, r_c) \\ &\quad + \frac{1}{2} (x - x_e)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_e, r_c) + \dots\end{aligned}$$

Ahora bien:

$f(x_e, r_c) = 0$, por ser x_e punto de equilibrio,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_e, r_c) = 0$, por ser tangente al eje x .

Entonces:

$$\dot{x} = a(r - r_c) + b(x - x_e)^2 + \dots$$

y el comportamiento es similar a $\dot{x} = r + x^2$

Suponemos: $a = \frac{\partial f}{\partial r}(x_e, r_c) \neq 0$; $b = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_e, r_c) \neq 0$.

Estas son las formas normales (detalles Guckenheimer-Holmes y en Wiggins).

3.2 Bifurcación transcritical.

Un punto crítico puede cambiar su estabilidad si el parámetro es variado. Esta es llamada una bifurcación transcritical.

La forma normal es:

$$\dot{x} = rx - x^2.$$

Puntos fijos: $f(r) = 0$ i.e. $rx - x^2 = 0$

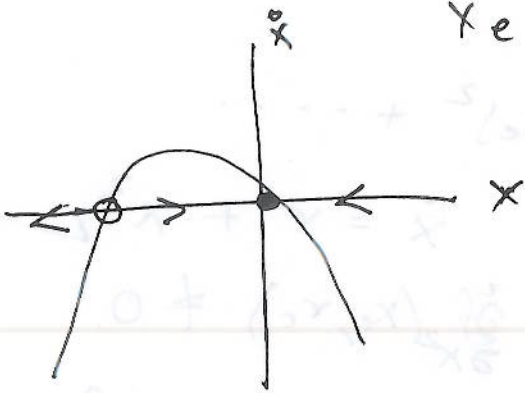
$$\text{i.e. } (r - x)x = 0 \Rightarrow x_e = 0$$

$$x_e = r.$$

Notemos que $x_e = 0$ es siempre un punto crítico, independientemente del valor de r .

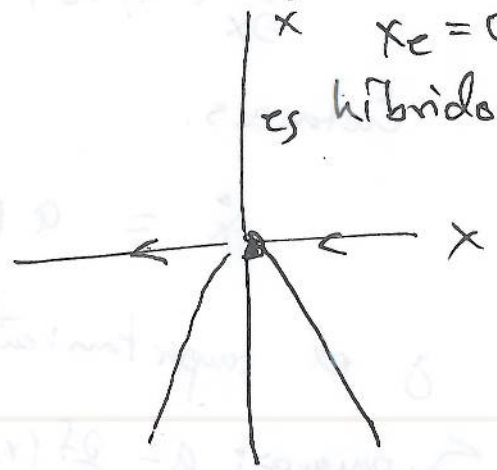
Para:

$r < 0$
 $x_e = 0$ es estable
 $x_e = r$ es inestable



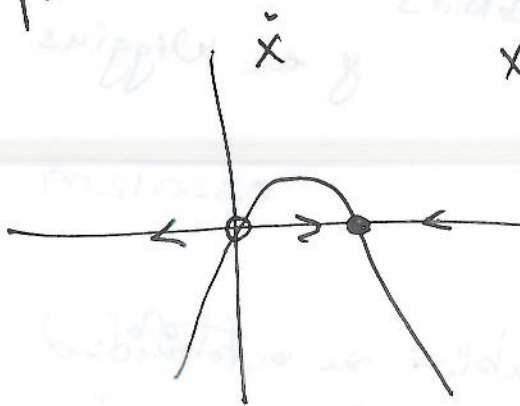
$r = 0$

$x_e = 0$
 es híbrido



∫ para $r > 0$:

$x_e = 0$ es inestable
 $x_e = r$ es estable.



Vemos que:

$x_e = 0$ estable $\xrightarrow{r < 0}$ inestable $\xrightarrow{r > 0}$
 $x_e = r$ inestable $\xrightarrow{r < 0}$ estable $\xrightarrow{r > 0}$

