Tópicos de Ecuaciones Diferenciales 3215φ209.

Mat-320.

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS NO LINEALES Y SUS APLICACIONES.

Primer semestre 2010. Departamento de Matemáticas Universidad de Guanajuato (Enero-Mayo 2010).

Textos: 1) Steven Strogatz Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, Chemistry and Engineering.

2) Paul Glendining. Stability, Instability and Chaos: an introduction to the theory of nonlinear ordinary differential equations

Parte I: Sistemas de primer orden: Flujos en una dimensión, bifurcaciones y flujos en el circulo.

Parte II: Sistemas de segundo orden: Flujos en dos dimensiones Sistemas lineales, clasificación, Plano-fase, puntos fijos, linealización, el péndulo, sistemas conservativos.

Parte III. Métodos asintóticos (para resolver ecuaciones diferenciales) Teoría de perturbación, series asintóticas, método de escalas múltiples, sistemas cercanamente Hamiltonianos

Parte IV. Breve introducción al caos (si el tiempo lo permite). El sistema de Lorenz, propiedades simples del sistema, Atractores extraños

- Partes I, II y IV — Strogatz
- Partes III — Glendinning.

07120622009.

Cap 1 Dynamical Systems: Introducción y Panorama.

→ Ecuaciones Diferenciales: Variables independientes continuas.
Ecuaciones en Diferencias: Variables independientes discretas.

Ecuaciones Diferenciales: { Ordinarias: Solamente una variable independiente ←
{ Parciales: Varias variables independientes.

Ejemplos: 1) Oscilador armónico amortiguado.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx. \quad \text{(Ley de Newton)}$$

es una ec. dif. ordinaria.

2) Ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{(Ley de Newton continua)}$$

es una ecuación diferencial parcial

Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n, t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, \dots, x_n, t)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n, t)$$

← Nótese la dependencia del tiempo.

Si el sistema depende explícitamente de tiempo, t, se le llama sistema no autónomo. (como en el ejemplo)

Si es independiente del tiempo, t, (i.e., $f_1, f_2, \ldots, f_n$ no dependen de t) se dice ser un sistema autónomo.

Ejemplo: Oscilador amortiguado y forzado:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-b\frac{dx}{dt}}_{\text{amortiguamiento}} \underbrace{-kx}_{\substack{\text{Ley de Hooke}\\ \text{(resortes)}}} + \underbrace{F_0\cos(\omega t)}_{\substack{\text{Fuerza}\\ \text{externa.}}}$$

Definamos la nueva variable dependiente $y = y(t)$ por

$$y \doteq \frac{dx}{dt}$$

Entonces, obtenemos el sistema:

Sistema no autónomo y lineal

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{b}{m}y - kx + F_0\cos(\omega t) \end{cases}$$

Es un sistema de 2 dimensiones, no autónomo (pues depende del tiempo t explícitamente.) (Además: lineal!)

Sin embargo, puede ser convertido en un sistema autónomo:

07/06/2009.

Definimos: una nueva variable dependiente $z = z(t)$,

$$z \equiv t.$$

siendo una tercera equación: $\frac{dz}{dt} = 1$.

Tenemos entonces un sistema en 3-dimensiones.:

$$(**)\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{b}{m}y - \frac{k}{m}x + \frac{F_0}{m}\cos(\omega z) \\ \frac{dz}{dt} = 1. \end{cases}$$

¡Autónomo, y <u>no</u> lineal!

El sistema (*) en pag. =4= es:

1) <u>Lineal</u> y
2) <u>no</u> <u>autónomo</u>.

El sistema (**):

1) es <u>no</u> lineal. (por $\cos(\omega z)$)
2) pero es <u>autónomo</u>

<u>Conclusión</u>: Cualquier sistema <u>no</u> <u>autónomo</u> puede ser convertido en un sistema <u>autónomo</u>.

Δ linear system:

Un sistema lineal es aquel donde las variables dependientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aparecen linealmente, i.e., en potencias de 1.

Def: Un sistema lineal es aquel donde las variables dependientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y sus derivadas aparecen linealmente, i.e., en potencias de 1.

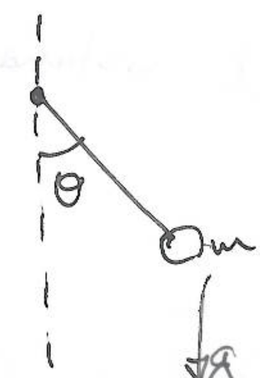
Ej: En el sistema (*) tenemos: $x^1, y^1, \left(\frac{dx}{dt}\right)^1, \left(\frac{dy}{dt}\right)^1$

Def: De otra forma, decimos que el sistema es no lineal.

Ej: En el sistema (**), tenemos $(\cos wz)$, donde $z = z(t)$, no está en potencias de 1.

Ej: La ecuación del péndulo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$



θ - ángulo respecto a la vertical

g - constante de gravedad $\sim 9.8\ m/seg^2$ cerca de la tierra.

l - longitud del péndulo

t - tiempo.

0309122009.

La ecuación puede convertirse en un sistema, definiendo:

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}.$$

Tenemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\theta.$$

Por el término $\sin\theta$, el sistema es no lineal.

La solución puede (~~convertirse en~~) escribirse en términos de las funciones elípticas.

Pero veremos más adelante cómo describir el movimiento sin necesidad de las funciones elípticas. Para ello, haremos uso del espacio fase.

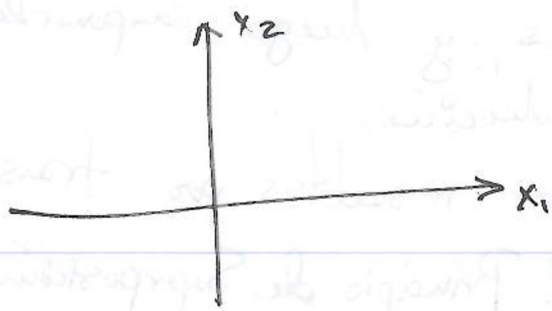
Consideremos el sistema:

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2)$$

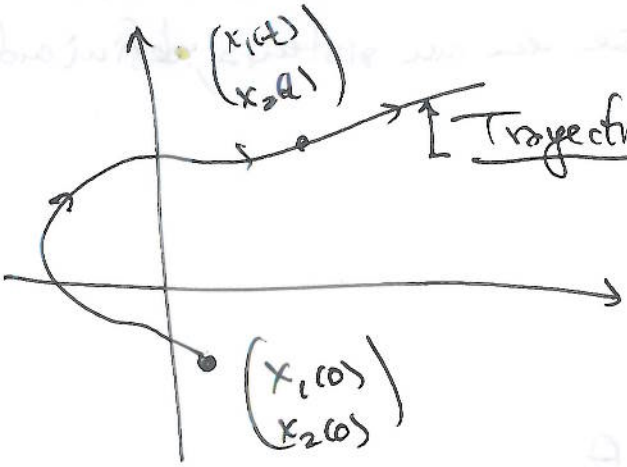
$$\dot{x}_2 = g(x_1, x_2),$$

con condiciones iniciales $x_1(0)$, $x_2(0)$

y consideremos el espacio:



al cual se le denomina espacio fase:



Trayectoria o flujo del sistema en el espacio fase, dadas las condiciones iniciales $x_1(0)$ y $x_2(0)$.

Un sistema:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n),$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

es un sistema de orden n o un sistema n-dimensional.

Linealidad vs. No Linealidad.

Un sistema lineal tiene n soluciones "linealmente" independientes:

$$Y^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})^t$$
$$\vdots$$
$$Y^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})^t.$$

La solución general del sistema lineal es una combinación:

$$Y(t) = c_1 Y^{(1)} + c_2 Y^{(2)} + \dots + c_n Y^{(n)}.$$ Principio de superposición

Los sistemas no lineales no tienen esta propiedad, no pueden ser descompuestos en partes, y luego componerlos todos para entonces tener una solución.

Los Sistemas lineales pueden ser resueltos por trasformadas de Laplace o de Fourier, y el Principio de Superposición es válido.

02/5/12/2009.

Parte I Flujos en una dimensión

Capítulo 2. Flujos en la línea.

The n-dimensional system:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donde $x_j = x_j(t)$ $1 \le j \le n$, son funciones de t

f_j son funciones de las variables x_k

Sistema 1-dimensional, o de 1^{er} orden.

$$\dot{x} = f(x).$$

$x = x(t)$ es real.
t - tiempo.

1). Sistema, sin cuando $n=1$. $f(x)$ es real y suave

2) $f = f(x)$ no depende del tiempo (en este capítulo)

Si $f = f(x,t)$ el sistema es no-autónomo y es más complicado. De hecho:

$$\dot{x} = f(x,t) \iff \left.\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,y)\\ \dot{y} &= 1\end{aligned}\right\}$$ es un sistema de dos dimensiones

Un punto de vista geométrico.

Se trata de interpretar la ecuación diferencial como un campo vectorial.

Considere mos la ecuación diferencial no lineal:

$$\dot{x} = \cos x.$$

Resolvamos la ecuación por separación de variables:

$$dt = \frac{dx}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \quad t = \int \frac{dx}{\cos x} = \log|\sec x + \tan x| + C.$$

Digamos que pedimos la siguiente condición inicial:

$$x(0) = x_0.$$

Entonces:

$$0 = \log|\sec x_0 + \tan x_0| + C.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = \log\left|\frac{\sec x + \tan x}{\sec x_0 + \tan x_0}\right|.}$$

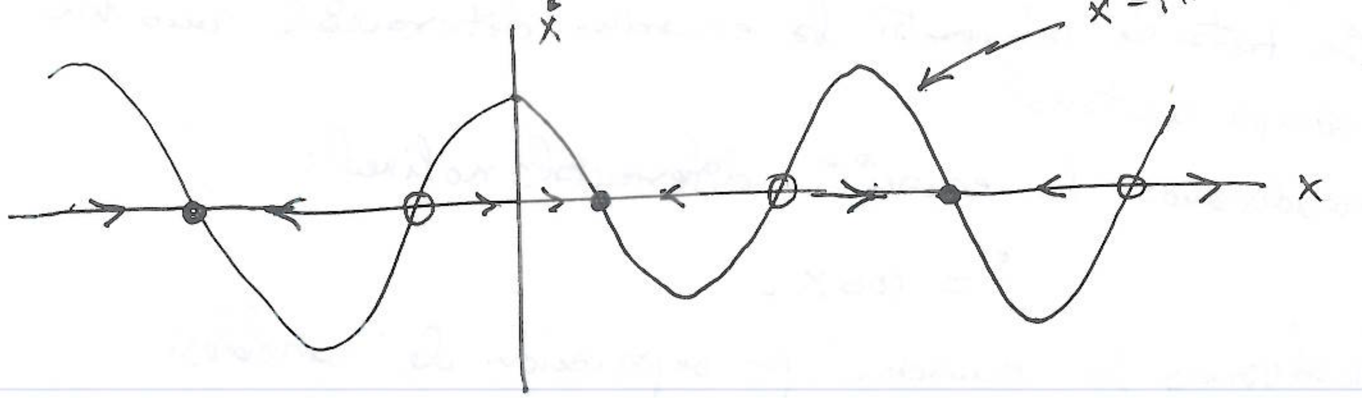
Pero esta formula <u>no</u> nos dice mucho acerca de $x(t)$ y su comportamiento para cualquier valor de t.

<u>Preguntas:</u> ¿Es $x(t)$ finito, para todo t finito?

¿O $x(t)$ se "vuela" para algún t finito?

¿Qué pasa si $t \to +\infty$?

<u>Graphical</u> <u>point</u> <u>of</u> <u>view</u>.



0215122009.

Puntos donde

$$\dot{x} = 0$$

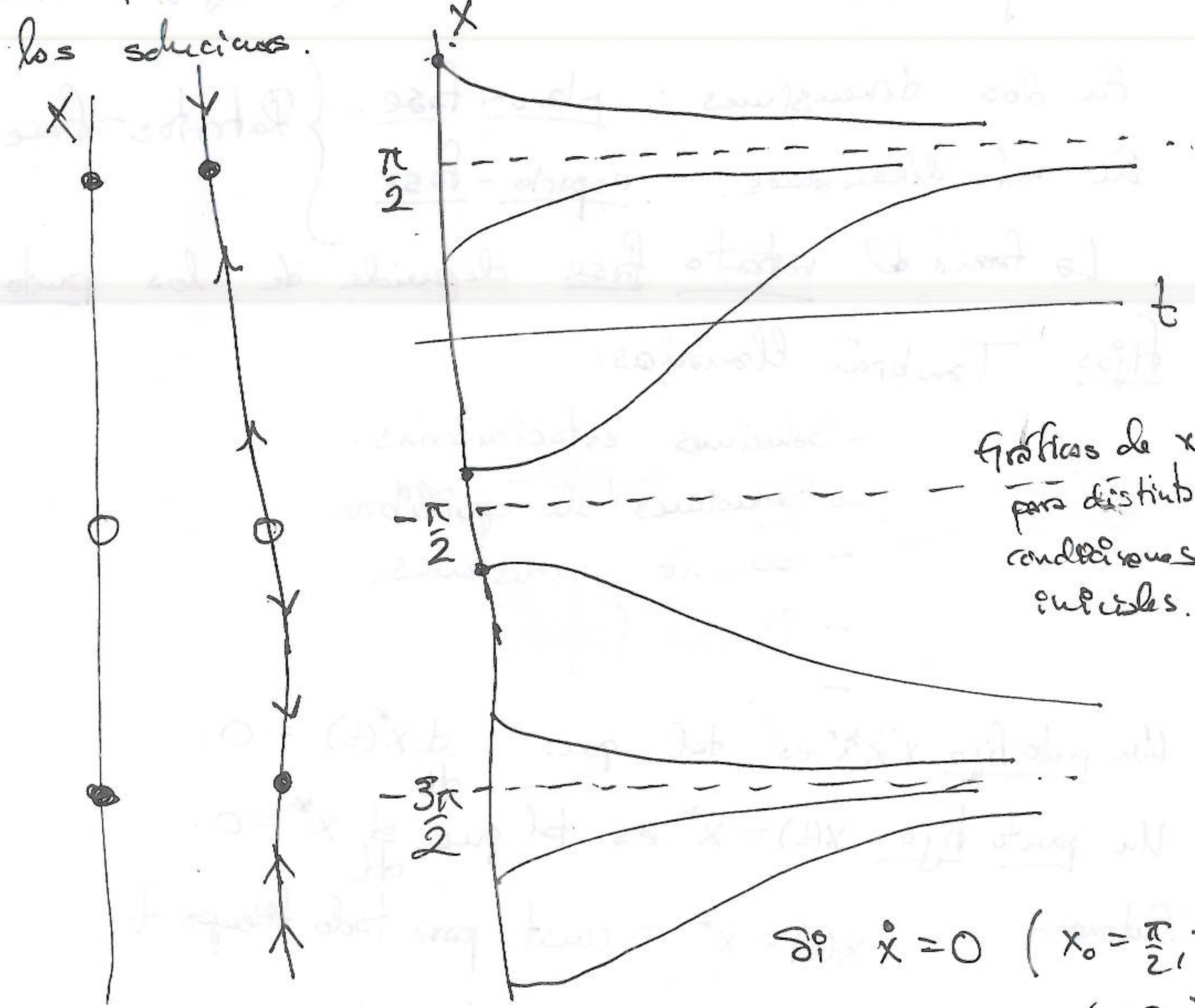
se les llama <u>puntos fijos</u>. Aquí: $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$

Hay de dos clases de puntos fijos:

a) <u>Estables</u>: Atractores, pozos, <u>sinks</u>.
(<u>puntos negros</u> en la figura anterior.)

b) <u>Inestables</u>: Fuentes, repelentes.

Ya podemos ahora describir el comportamiento de los soluciones.



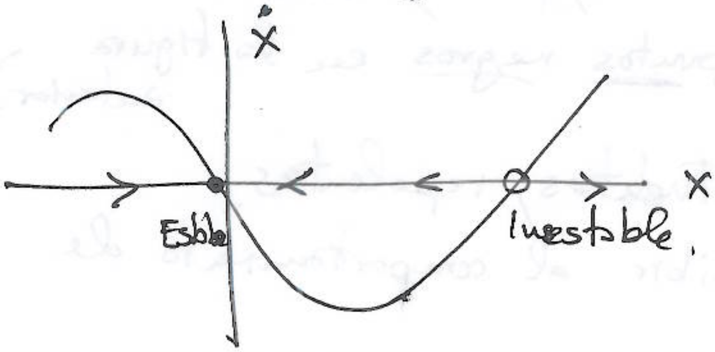
Gráficas de $x(t)$ para distintas condiciones iniciales.

Si $\dot{x} = 0$ $\left(x_0 = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \text{ ó } -\frac{3\pi}{2}\right)$

entonces $x(t) = \text{cust}$.

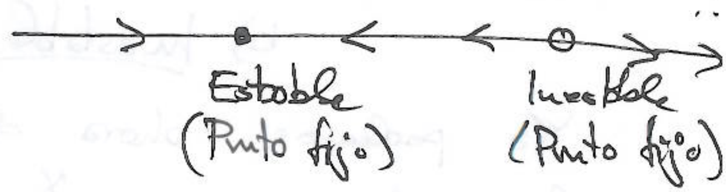
Como vemos, podemos conocer el comportamiento de los soluciones sin necesariamente conocer la solución explícita:

Puntos fijos y Estabilidad.



Retratos-fase

Línea-fase:



En dos dimensiones: plano-fase.
En más dimensiones: espacio-fase

$\Big\}$ Retratos-fase.

La forma del retrato fase depende de los puntos fijos. También llamados:

- Soluciones estacionarias.
- Soluciones (o puntos) de equilibrio.
- Soluciones constantes.
- Puntos fijos.
-

Un punto fijo $x(t) = x^*$ es tal que $\frac{d}{dt} x^* = 0$.

Entonces: $x(t) = x^* = \text{cust.}$ para todo tiempo t.

02/5/12 2009.

Dado que $\frac{d}{dt}x^* = 0$ y $\dot{x} = f(x)$, entonces los puntos fijos se determinan por la ecuación.

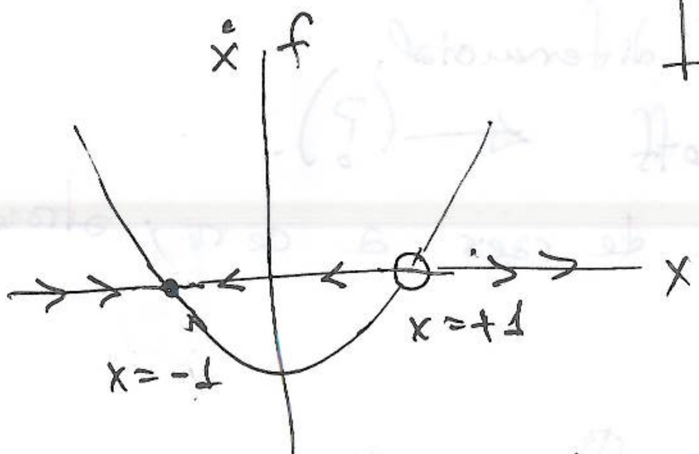
$$f(x^*) = 0 .$$

Ejemplo: Encuentre los puntos fijos, y determine su estabilidad, del sistema:

$$\dot{x} = x^2 - 1.$$

Sol: Los puntos fijos resuelven el sistema:

$$f(x^*) = 0$$
$$(x^*)^2 - 1 = 0$$
$$\boxed{x^* = \pm 1}$$

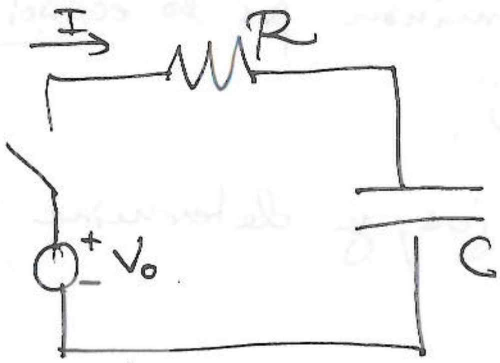


	Clasificación	Estabilidad
$x^* = +1$	fuente	inestable
$x^* = -1$	pozo.	estable

Decimos que $x^* = -1$ es localmente estable, pues pequeñas perturbaciones mantienen las soluciones cerca de $x^* = -1$, y decaen a $x^* = -1$.

Perturbaciones grandes pueden mandar las soluciones que no decaen a $x^* = -1$.

Ejemplo Circuito Eléctrico



R - resistencia de resistencia R.

C - Capacitor de capacitancia C.

ϕ^{+}_{-} - Pila de voltaje V_0.

Sea $Q = Q(t)$ la carga en el capacitor al tiempo t.

$I = \frac{dQ}{dt}$ es la corriente eléctrica.

En un momento $t = 0$, $Q(0) = 0$, y se cierra el circuito. Describa el comportamiento de $Q(t)$.

Solución: Plantear la ecuación diferencial.

Ley de Kirckhoff. Kirchkoff $\leftarrow$ (?).

$\rightarrow$ El voltaje total debe de caer a cero; alrededor del circuito.

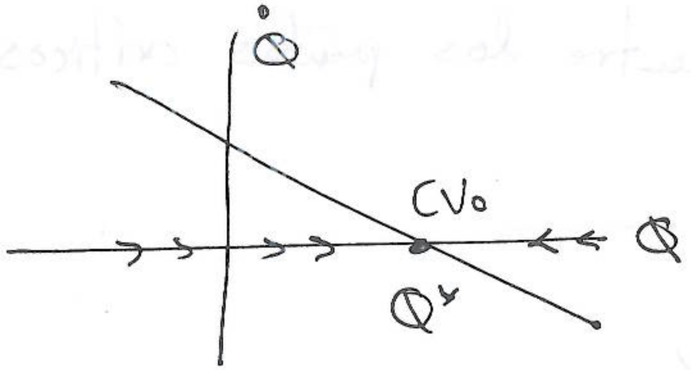
Entonces: $$V_0 - RI - \frac{Q}{C} = 0.$$

$$V_0 = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} + \frac{V_0}{R}} = f(Q).$$

Puntos fijos: $$f(Q) = 0. \Rightarrow -\frac{Q^*}{RC} + \frac{V_0}{R} = 0$$

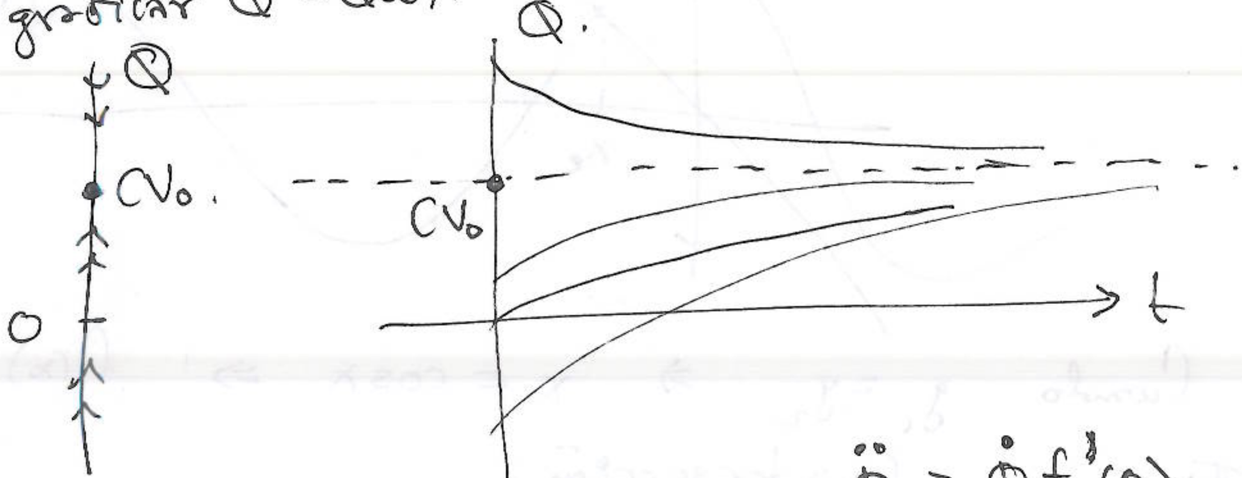
$Q^* = CV_0$ es el punto fijo.



Entonces Q^* es estable y es un pozo.

Dado que el flujo siempre tiende a Q^*, sin importar qué condición inicial se considere.

Para graficar $Q = Q(t)$:



$$\ddot{Q} = \dot{Q} f'(Q) = -\frac{\dot{Q}}{RC}$$

$$\ddot{Q} = \dot{Q} f'(Q) = -\frac{\dot{Q}}{RC}$$

$\ddot{Q} < 0$, si $\dot{Q} > 0$, ~~ie for $Q < CV_0$~~

Entonces: $\ddot{Q} < 0$, if $\dot{Q} > 0$, ie., for $Q < CV_0$.
y es cóncava

$\ddot{Q} > 0$, if $\dot{Q} < 0$, ie, for $Q > CV_0$,

como lo vemos en la gráfica, y es convexa.

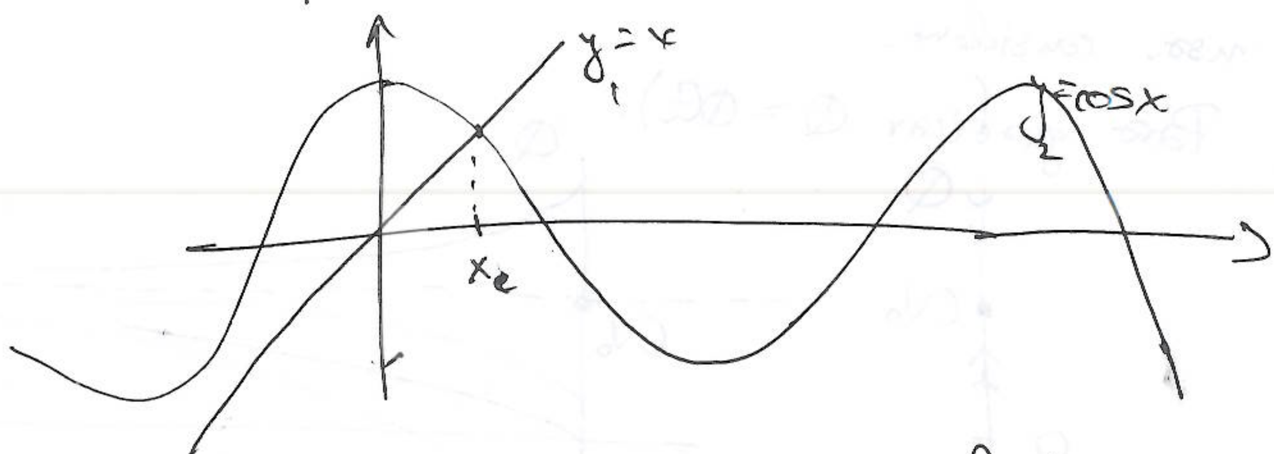
Ejemplo: $\dot{x} = x - \cos x$.

Dibuje la línea fase, encuentre los puntos críticos y determine su estabilidad.

Sol: Dada

$$f(x) = x - \cos x,$$

bosquejar el campo vectorial. Graficar:



Cuando $y_1 = y_2 \Rightarrow x = \cos x \Rightarrow f(x) = 0$.

Tiene una sola intersección:

$$x_c = ?.$$

Notemos que para:

- $x < x_c$, $x < \cos x \Rightarrow f(x) < 0$, $\dot{x} < 0$
  $\Rightarrow$ flujo a la izquierda
- $x > x_c$, $x > \cos x \Rightarrow f(x) > 0$
  $\dot{x} > 0$
  $\Rightarrow$ flujo a la derecha

Entonces x_e es inestable.

Nótese que pudimos determinar la naturaleza del punto crítico x_c, aún cuando no conocemos quién es x_c.

Modelos poblacionales.

Sea $N(t)$ - población al tiempo t.

* El modelo más sencillo es:

$$\dot{N} = rN. \qquad (r = \text{const}).$$

donde r - taza de natalidad/mortandad de la población en cuestión. La predicción de éste modelo es:

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

un crecimiento exponencial

———— ∘ ————

* La población nunca crece exponencialmente.
  ⇒ necesitamos otros modelos que tomen en cuenta territorios y sobrepoblación.

El crecimiento por "unidad de habitante" es:

$$\frac{\dot{N}}{N} = r \quad \leftarrow \text{taza de crecimiento.}$$

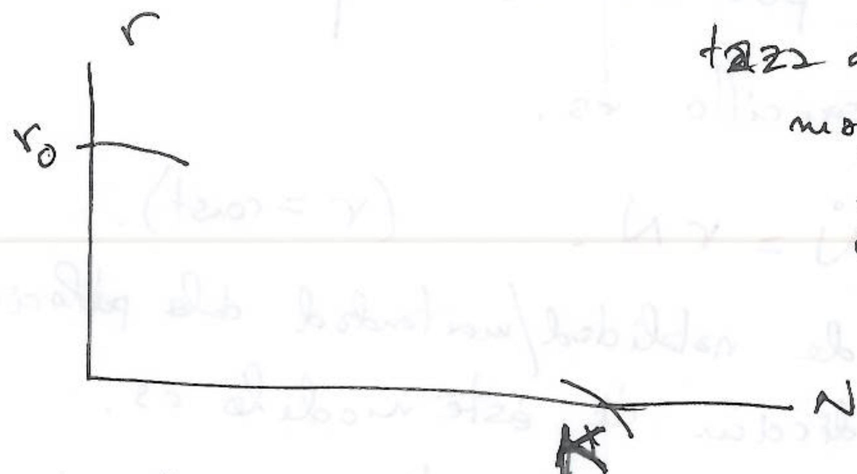
El siguiente modelo supone que

$$r = r(N).$$

Cuando la población es pequeña, se supone.

$$\frac{\dot{N}}{N} = r(N) \simeq r_0 > 0$$

casi constante. Si la población crece mucho, debe de haber algún momento donde se detenga el crecimiento poblacional: la tasa de mortandad es mayor que la natalidad y $r(N) < 0$.



El modelo más sencillo es aquel que une los puntos $(0, r_0)$ y $(K, 0)$, y es una línea recta:

$$r(N) = -\frac{r_0}{K} N + r_0.$$

i.e.

$$r(N) = r_0\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

Then $\frac{\dot{N}}{N} = r(N)$ implies:

$$\boxed{\dot{N} = r_0 N\left(1 - \frac{N}{K}\right)}$$

Modelo de Verhulst (1938)

Modelo de la logística.

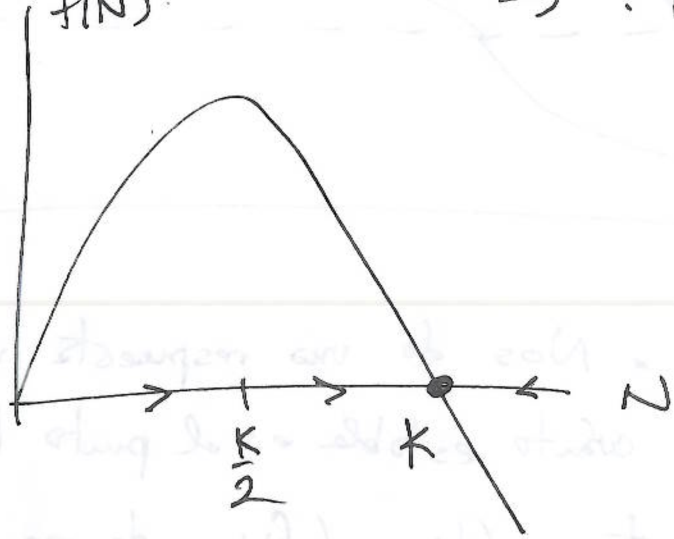
¿Qué nos dice éste modelo?

07/27/12/2009.

Aquí:
$$f(N) = r N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$ es una parábola:

Putos fijos: $\dot N = 0 \Rightarrow f(N) = 0$:

$$\Rightarrow N_c = 0, \quad N_c = K.$$



Si $N < K$
$\Rightarrow f(N) > 0$
$\dot N > 0$
$N \nearrow$ monotona creciente

Si $N > K$,
$\Rightarrow f(N) < 0$
$\dot N < 0$
$N \searrow$ monotona decreciente

Entonces $N_c = 0$ es un punto de equilibrio inestable

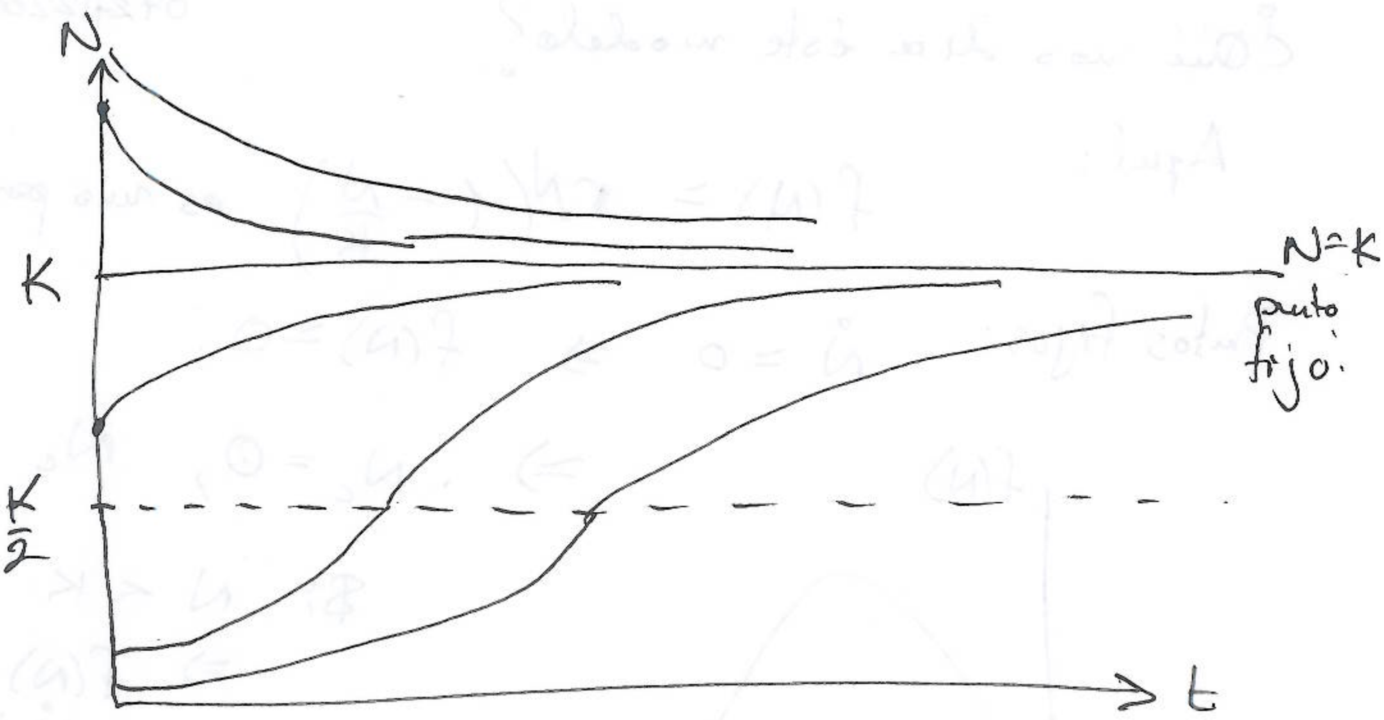
y $N_c = K$ es un punto de equilibrio estable.

Podemos extraer aún más información:

Si $N < \frac{K}{2} \Rightarrow f'(N) \geq 0 \Rightarrow \ddot N > 0$.
$\Rightarrow N(t)$ es convexa.

Si $N > \frac{K}{2} \Rightarrow f'(N) < 0 \Rightarrow \ddot N < 0$
$\Rightarrow N(t)$ es cóncava

Entonces, punto de inflexión en la horizontal $N = \frac{K}{2}$.



<u>Estabilidad</u> <u>Lineal</u>. Nos da una respuesta más cuantitativa de ~~cómo~~ cuánto estable es el punto fijo.

Sea x_c un punto crítico (fijo, de equilibrio, estacionario). y definamos por

$$\eta(t) = x(t) - x_c$$

la "desviación" desde x_c, es decir, nos mide cuánto nos separamos de x_c. Notamos que:

$$\dot{\eta} = \frac{d}{dt}(x(t) - x_c) = \dot{x} = f(x) =$$

$$= f(x_c + \eta).$$

Supongamos que: η es "pequeño". Entonces, si f tiene series de Taylor en $x = x_c$:

$$\dot{\eta} = f(x_c + \eta) = f(x_c) + \eta f'(x_c) + \frac{1}{2}\eta^2 f''(x_c) + O(\eta^3).$$